# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 8 Juni 1928 Heft 3


Inhalt:



# HAUPTAUFSÄTZE

## Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen.


Von **R. v. MISES** in Berlin.


Als ich vor etwa fünfzehn Jahren die Skizze einer vollständigen Mechanik der plastisch-deformablen, isotropen Körper veröffentlichte[1]), lagen noch sehr wenige Versuchsergebnisse vor, an denen die Brauchbarkeit der Theorie hätte geprüft werden können. Es steht auch heute nicht viel anders und namentlich die Hauptfrage, ob zwischen Spannung und Deformationsgeschwindigkeit in jedem Punkte der vermutete Zusammenhang besteht, ist durch unmittelbare Beobachtungen noch nicht entschieden. Die schönen und praktisch wertvollen neueren Beiträge zum ebenen Problem von Prandtl, Nádai, Hencky u. a.[2]) können hier nicht gut herangezogen werden, da sie den Spannungszustand allein betrachten; die Vervollständigung der Untersuchung durch Berücksichtigung der Formänderungsvorgänge, wie ich sie in meinem Dresdener Vortrag angedeutet habe[3]), scheint in den meisten Fällen noch auf große Schwierigkeiten zu stoßen. Nur in einem Punkte haben die neueren Versuche, namentlich die des Göttinger Instituts, wesentliche Aufklärung gebracht, nämlich über den Verlauf der Fließgrenze oder die Kennzeichnung der Spannungszustände, unter denen die plastische Deformation vor sich geht. Die vor meiner ersten Veröffentlichung allein bekannt gewesene Auffassung von O. Mohr, wonach die mittlere der drei Hauptspannungen ohne Einfluß auf den Beginn des Fließens sein soll, hat sich als unhaltbar herausgestellt. Dagegen weisen die Versuchsergebnisse übereinstimmend darauf hin, daß der von mir angegebene Ausdruck, die Quadratsumme aus den Differenzen der drei Hauptspannungen, für den Eintritt des Fließens maßgebend ist. Damit, daß dieser Ansatz häufig als Hypothese der »Konstanz der Gestaltänderungsenergie« bezeichnet wird, setze ich mich weiter unten auseinander.

Inzwischen hat sich die experimentelle Forschung nach einer etwas andern Richtung gewandt und die Erscheinungen an nicht-isotropen, an kristallinischen Medien

[1]) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. Göttingen, Math. phys. Klasse 1913, S. 582 bis 592.

[2]) Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 15 bis 28; Bd. 3 (1923), S. 241 bis 251, 442 bis 451 usf.

[3]) Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 147 bis 149. Hier wird an einem Beispiel die Uebereinstimmung der vollständigen Theorie mit der Beobachtung nachgewiesen. Das Torsionsproblem [Trefftz, diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 64 bis 73] ist von den Annahmen über die Deformation unabhängig.

Die Darstellung ist lehrbuchmäßig breit und klar, die mathematischen Voraussetzungen gehen nicht über das hinaus, was man von einem Studenten der Mathematik oder der Physik oder der Technik in mittleren Semestern erwarten kann. Von der Vektorrechnung ist sparsamer Gebrauch gemacht. Die Formulierung der Grundlagen ist zwar nicht die Hauptsache, aber doch befriedigend genau und die Durcharbeitung im einzelnen exakt. Der Inhalt ist reich und der heutigen Forschung angepaßt. Es findet sich manches Neue in dem Buch, namentlich soweit der erste Verfasser selbst an der Weiterentwicklung der Mechanik mitgearbeitet hat, auch waren die Verfasser bestrebt, den Anschluß an die moderne Physik herzustellen (Andeutungen der Quantentheorie und der Schrödingerschen Wellenmechanik). Technische Anwendungen treten etwas zurück, immerhin sind die wichtigsten angedeutet, auch ist der Standpunkt nicht allzu abstrakt, indem beispielsweise auf die Reibungserscheinungen näher eingegangen und auch die Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze besprochen wird.

Der Stoff gliedert sich in zwölf Kapitel, von denen jeder Teilband sechs enthält. Der erste Teil beginnt mit der Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn. Es folgt der freie Punkt und die Bewegung auf vorgeschriebener Fläche. Dabei wird ziemlich ausführlich auf die äußere Ballistik eingegangen. Die Elemente der Himmelsmechanik schließen sich naturgemäß an. Es folgt ein Kapitel über Energie und Impuls. Das fünfte Kapitel enthält das d'Alembertsche Prinzip, die Lagrangeschen Gleichungen und die Theorie der nichtholonomen Systeme. Der erste Teilband schließt mit einem Kapitel über Stabilität und kleine Schwingungen. Der zweite Teilband widmet die drei ersten Kapitel, d. h. die kleinere Hälfte der Mechanik der starren Körper. Das erste Kapitel enthält die ebene Bewegung des starren Körpers, auch etwas über Rollreibung. Das zweite die Bewegung um einen festen Punkt, dabei die Poinsotbewegung und den Fall der Frau Kowalewsky, das gyroskopische Phänomen. Das dritte Kapitel behandelt allgemeinere Rotationsbewegungen, z. B. den Billardball, den Reifen, die eingebauten Kreisel. Zwei weitere Kapitel setzen das fünfte Kapitel des ersten Teiles fort, sie enthalten die Hamilton-Jacobische Theorie der kanonischen Systeme, die daran anschließende Transformations- und Integrationstheorie, als Anwendung einiges aus der Störungstheorie, endlich die Minimalprinzipien von Gauß, Hertz, Hamilton und Jacobi. Der zweite Band schließt mit einem Kapitel über die Stoßvorgänge. Es mag noch erwähnt werden, daß jedes Kapitel am Schluß eine größere Reihe von Aufgaben enthält, deren Lösung an die Selbständigkeit des Lesers einige Anforderungen stellt. Es ist mehr eine Sammlung kleinerer Probleme.

Berlin. G. Hamel. 884

**Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):**

G. **MAHLER †,** Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Physikalische Aufgabensammlung. Mit den Resultaten. Dritte, völlig neu umgearbeitete Auflage, besorgt von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen in Württemberg. Sammlung Göschen Nr. 243. Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig 1927. 136 S. Preis 1,50 M.

Prof. E. **SCHULTZ,** weil. Oberlehrer an der Maschinenbau- und Hüttenschule zu Duisburg. Mathematische und technische Tabellen für Maschinenbau. Tabelle II. Neubearbeitet von Dipl.-Ing. Professor Dr. S. Jakobi, Dipl.-Ing. O. Kehrmann, Studienräten der staatl. vereinigten Maschinenbauschulen in Elberfeld und Köln a. Rh. 17. Aufl., 217. bis 228. Tausend der Schultzschen Tabellen. Zum Gebrauch bei den Reifeprüfungen an den höheren Maschinenbauschulen, Hüttenschulen und verwandten Fachschulen der Metallindustrie in allen deutschen Bundesstaaten durch die zuständigen Ministerien genehmigt. G. D. Baedeker, Essen 1928. XV + 434 S. Preis 8,40 M.

Prof. Dr. GUSTAV **FÖRSTER,** Abteilungsvorsteher im Preuß. Geodätischen Institut bei Potsdam. Geodäsie (Landesvermessung und Erdmessung). Mit 33 Figuren. Sammlung Göschen 102. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1927. 121 S. Preis 1,50 M.

# NACHRICHTEN

## Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 2. März sprach Hr. R. Becker-Charlottenburg über »Betrachtungen zur Molekulartheorie der unelastischen Formänderung«.

Prager Mitglieder.

Am 21. Februar 1928 sprach Hr. Joh. Labus-Prag über »Neues auf dem Gebiete der elektrostatischen Berechnung von Hochspannungstransformatoren mit Hilfe der konformen Abbildung«. Nach kurzer Erinnerung an die Grundbegriffe der konformen Abbildung wurde die Abbildung polygonal begrenzter Bereiche (Transformatorbereich) auf die obere Halbebene mit Hilfe des Schwarzschen Theorems dargestellt; ferner die Abbildung auf den Bereich eines homogenen elektrischen Feldes, welches durch einen beiderseits ins Unendliche verlaufenden Parallelstreifen begrenzt wird. Die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung wurden erwähnt. Es folgte die Berechnung des Potential- und Feldverlaufes von Transforma-

toren mit Berücksichtigung des Umstandes, daß nicht nur eine, sondern mehrere Wicklungen mit längs derselben konstanten Potentialen vorhanden sind. (Bericht über eine vom Vortragenden veröffentlichte Arbeit im Archiv für Elektrotechnik [Bd. XIX, S. 82]).

Der weitere Ausbau der Anwendung der konformen Abbildung bei der elektrostatischen Berechnung von Hochspannungstransformatoren geschieht in folgender Weise: Das Potential längs einer Transformatorwicklung wird nicht mehr als konstant angesehen, sondern es wird, wie es der Wirklichkeit entspricht, der Potentialabfall längs derselben berücksichtigt. Für den Fall, daß die elektrische Feldstärke überall unter demselben Winkel gegen die Oberfläche der Wicklung geneigt ist, wird der Potentialverlauf längs der Wicklung und somit der Aufbau der Wicklung ermittelt. Zum Schlusse wurden die Ergebnisse der Berechnung, welche für verschiedene Werte dieser Winkel und ferner für verschiedene Verhältnisse der Wicklungshöhe zum Abstand vom Mantel durchgeführt wurden, an Hand von graphischen Darstellungen gezeigt.

Hr. K. Körner-Prag sprach am 20. März 1928 über »Wirkungsgrad von Propellerturbinen bei wechselnder Beanschlagung«.

Am 24. April spricht Hr. K. Breitfeld über das »Sinus- und Tangensrelief in der Elektrotechnik«.

**Gründung einer Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Amerika.** Im Rahmen der großen American Society of Mechanical Engineerings wird die Organisation einer besonderen Fachgruppe für Mechanik, Physik und angewandte Mathematik vorbereitet. Unter dem Vorsitz von Prof. S. Timoshenko ist ein Ausschuß eingesetzt worden, der die Einzelheiten der Organisation festsetzen soll. Die Gründung nimmt ausdrücklich Bezug auf die durch die internationalen Kongresse für angewandte Mechanik zum Ausdruck gekommene Entwicklung. Eine Reihe von prominenten Mitgliedern der amerikanischen Vereinigung ist auch unserer Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik beigetreten, um damit den freundschaftlichen Zusammenhang zu dokumentieren.

**Mathematiker-Kongreß in Bologna.** Im September ds. J. findet in Bologna ein Mathematiker-Kongreß statt, der in den Sektionen III bis V auch verschiedene Gebiete der angewandten Mathematik, Mechanik, Astronomie, Geodäsie, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie Ingenieurwissenschaften behandeln wird. In dem französischen Einladungstext wird der Kongreß bezeichnet als »8 ième congrès international, fixé par l'Union internationale mathématique«, im deutschen Text wird gesagt, den Kongreß werde »die Internationale Mathematiker-Vereinigung abhalten«. Da die Einladungen auch einzelnen deutschen Fachkollegen zugegangen sind, sei hier zur Aufklärung folgendes mitgeteilt.

Auf dem fünften internationalen Mathematiker-Kongreß in Cambridge 1912 wurde beschlossen, den sechsten Kongreß in Stockholm 1916 abzuhalten. Schweden, das den Auftrag zur Veranstaltung des Kongresses übernommen hatte, konnte ihn des Krieges wegen nicht ausführen. Im Jahre 1918 wurde unter Führung französischer Gelehrter die »Union internationale« gegründet, eine Vereinigung von Gelehrten aller Fächer mit der satzungsmäßigen Bestimmung des Ausschlusses der Deutschen von allen wissenschaftlichen Veranstaltungen. Diese »Union« (bzw. die in ihr eingeschlossene Union mathématique) veranstaltete 1920 in Straßburg und 1924 in Toronto Mathematiker-Kongresse, zu denen die Deutschen nicht eingeladen wurden. Inzwischen wurden die Satzungen der Union dahin abgeändert, daß Deutschland nachträglich in die Vereinigung aufgenommen werden könnte, wenn es darum ansucht; ein solches Gesuch ist bisher nicht gestellt worden. Für den Kongreß in Bologna hat nun die Union den Weg gewählt, selbst etwas in den Hintergrund zu treten und es geschehen zu lassen, daß deutsche Gelehrte durch die aus Italienern bestehenden örtlichen Organisationen eingeladen werden. Welche Rolle sich die Union für die tatsächliche Leitung des Kongresses, die in Bologna vorzunehmenden Beschlußfassungen über weitere Kongresse usw. vorbehält und welche Rolle den Deutschen, die der Einladung der Italiener folgen, auf dem Kongreß zufallen wird, läßt sich nicht übersehen. 887

**Persönliches.** Hr. Dr.-Ing. G. Schnadel wurde als o. Prof. der Maschinenwirtschaft an die Techn. Hochschule Charlottenburg (Nachfolge von Laas) berufen. 887

# ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

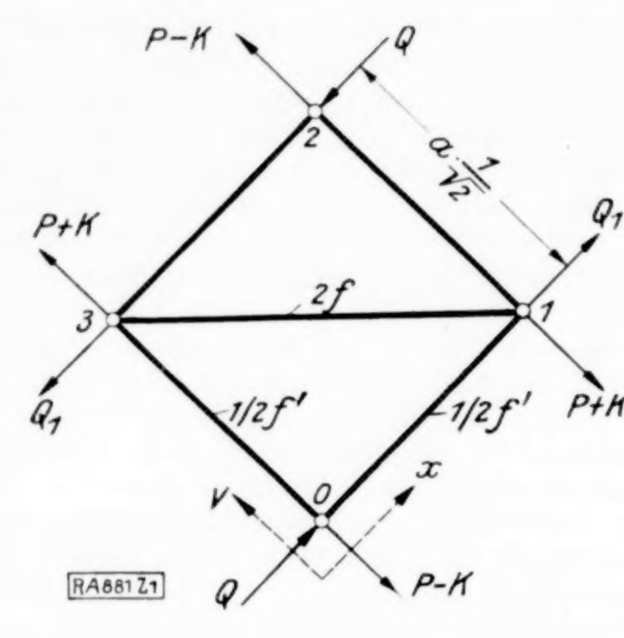
**Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers.** [1]) Ich erlaube mir zu dieser Arbeit von Hrn. W. Riedel folgende Bemerkungen:

Zu I. 3: Die Isotropie-Forderung ist nicht einwandfrei durchgeführt. Bei Belastung in Richtung der Diagonalstäbe sind die Kräfte nach beistehender Skizze einzuführen. Man erhält $S_{01} = -Q$, $S_{03} = P - K$. Da in $x$-Richtung keine Gesamtbelastung vorhanden ist, so wird $\frac{1}{\sqrt{2}} S_{13} = -2 S_{01}$. Die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in $x$-Richtung im Punkte 1 gibt:

$$-S_{01} + Q - S_{13}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0\,, \quad \textbf{hieraus: } Q_1 = Q.$$

Die Summe aller Kräftepaare im Körperteilchen gibt $K = Q$. Die Verlängerung in $y$-Richtung sei $c$, in $x$-Richtung $-\nu c$; dann erhält man für die Stäbe 03, 01 und 13:

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 169.




$$c = \frac{(P-Q)\,a\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\,f'\,E}\,,\qquad -\nu\,c = \frac{-Q\,a\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\,f'\,E}\,,$$

$$(c - \nu\,c)\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{1}\,Q\,a}{2\,f\,E}\,.$$

Aus der ersten Gleichung erhält man eine Beziehung zwischen $P$ und $Q$; die zwei letzten Gleichungen geben das Verhältnis der Stabquerschnitte

$$\frac{f}{f'} = \frac{\sqrt{2}\,\nu}{1-\nu}\,.$$

Für die Belastung in Richtung der Hauptstäbe galt

$$\frac{f}{f'} = \frac{1-\nu}{2\,\nu\sqrt{2}}$$

(Seite 172, 12. Z. v. o.). Hieraus:

$$\nu = \frac{1}{3}\,,\qquad \frac{f}{f'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Zu II, 12: In Abb. 18 und Abb. 22 muß für $x = c$, $y = 0$ die Spannung $\tau = 0{,}25$ sein. Hat die normalgerichtete Randbelastung einen Sprung $p$, so tritt an dieser Stelle die Schubspannung $\frac{1}{\pi}\,p$ auf.

Zu III, 13: Die Airysche Spannungsfunktion $F = c\,y\ln r$ genügt nicht; sie gilt nur dann für den Spannungszustand einer durch eine Einzelkraft belasteten Ebene, wenn $\nu = 0$ ist. (Vergl. A. und L. Föppl, Drang und Zwang I, zweite Auflage, § 44, Gl. (80)).

Dortmund. C. Weber. 881

* * *

**Erwiderung.** Auf die Ausführungen von Herrn Dr. Constantin Weber habe ich folgendes zu erwidern:

Zu I: Wie Herr Weber richtig behauptet, ist die in I, 3 (Zamm 3, 1927, S. 171) aufgestellte Isotropiebedingung leider nicht korrekt ausgeführt.

Zu II: Die Singularität der Ecke ist in dem aperiodischen Bestandteil der Lösung mit enthalten. Für $x = c$, $y \longrightarrow 0$ wird $\tau = -0{,}25 \cdot \frac{4\,p}{\pi}$. In Abb. 18 und 22 ist bei der Schubspannung an eine Schnittgerade unmittelbar rechts neben der Ecke gedacht.

Zu III: Die in »A. und L. Föppl, Drang und Zwang«, I, § 44, aufgestellten Gleichungen gehen nicht für $\nu = 0$ in die Spannungskomponenten der Airyschen Spannungsfunktion $F = c\,y\ln r$ über. Die in III, 13, 14 durchgeführte Rechnung ist insofern nicht einwandfrei, als $F = c\,y\ln r$ keine eindeutigen Verschiebungswerte liefert. Als kompensierende Spannungsfunktion könnte $F = C\,r\,\varphi\cos\varphi$ eingeführt werden.

Göttingen. W. Riedel. 881 a

**Zur Theorie der zylindrischen Schalen und Bogenträger.** Zur Zuschrift von Hrn. Meißner-Zürich, Bd. 7 (1927), S. 507, bemerke ich folgendes: Die von Hrn. Pöschl (Bd. 7 (1927), S. 189 bis 198) nach der ein- und zweidimensionalen Theorie behandelten Beispiele stimmen in ihren Randbedingungen nicht überein. Will man mit Hilfe des angeführten Beispieles der zweidimensionalen Theorie die eindimensionale Theorie prüfen, so ist $N = 0$ und $\omega = 0$ zu setzen. Die eindimensionale Theorie gibt dann für diesen statisch unbestimmten Fall:

$$\frac{G}{p_0\,R^2} = \frac{1}{2}\left(\cos\vartheta + \vartheta\sin\vartheta - \frac{4}{\pi}\right).$$

Die Lösung der zweidimensionalen Theorie gibt bei Berücksichtigung aller trigonometrischen Glieder:

$$\frac{G}{p_0\,R^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{h^2}{R^2} + \frac{1}{2}\left(\cos\vartheta + \vartheta\sin\vartheta - \frac{4}{\pi}\right).$$

Für dieses statisch unbestimmte Beispiel trifft folglich meine Bemerkung in Bd. 7 (1927), S. 420 zu.

Dortmund. C. Weber. 882

**Räumliche Spannungszustände in plastischen Körpern.** Zu der Fußnote in dem Aufsatz von Hrn. Jenne, S. 18 bis 44 ds. Bandes, legt Hr. F. Schleicher Wert darauf, festzustellen, daß er die in dieser Zeitschr. Bd. 6, 1926, S. 199 veröffentlichte Erweiterung der Hypothese der »konstanten Gestaltänderungsarbeit an der Fließgrenze« bereits in seiner Probevorlesung an der Technischen Hochschule Karlsruhe am 8. Mai 1925 vorgetragen hat. 887

**(Redaktionsschluß 21. April 1928.)**

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

// ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 8 Juni 1928 Heft 3

Inhalt:



# HAUPTAUFSÄTZE

## Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Als ich vor etwa fünfzehn Jahren die Skizze einer vollständigen Mechanik der plastisch-deformablen, isotropen Körper veröffentlichte[1]), lagen noch sehr wenige Versuchsergebnisse vor, an denen die Brauchbarkeit der Theorie hätte geprüft werden können. Es steht auch heute nicht viel anders und namentlich die Hauptfrage, ob zwischen Spannung und Deformationsgeschwindigkeit in jedem Punkte der vermutete Zusammenhang besteht, ist durch unmittelbare Beobachtungen noch nicht entschieden. Die schönen und praktisch wertvollen neueren Beiträge zum ebenen Problem von Prandtl, Nádai, Hencky u. a.[2]) können hier nicht gut herangezogen werden, da sie den Spannungszustand allein betrachten; die Vervollständigung der Untersuchung durch Berücksichtigung der Formänderungsvorgänge, wie ich sie in meinem Dresdener Vortrag angedeutet habe[3]), scheint in den meisten Fällen noch auf große Schwierigkeiten zu stoßen. Nur in einem Punkte haben die neueren Versuche, namentlich die des Göttinger Instituts, wesentliche Aufklärung gebracht, nämlich über den Verlauf der Fließgrenze oder die Kennzeichnung der Spannungszustände, unter denen die plastische Deformation vor sich geht. Die vor meiner ersten Veröffentlichung allein bekannt gewesene Auffassung von O. Mohr, wonach die mittlere der drei Hauptspannungen ohne Einfluß auf den Beginn des Fließens sein soll, hat sich als unhaltbar herausgestellt. Dagegen weisen die Versuchsergebnisse übereinstimmend darauf hin, daß der von mir angegebene Ausdruck, die Quadratsumme aus den Differenzen der drei Hauptspannungen, für den Eintritt des Fließens maßgebend ist. Damit, daß dieser Ansatz häufig als Hypothese der »Konstanz der Gestaltänderungsenergie« bezeichnet wird, setze ich mich weiter unten auseinander.

Inzwischen hat sich die experimentelle Forschung nach einer etwas andern Richtung gewandt und die Erscheinungen an nicht-isotropen, an kristallinischen Medien

[1]) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. Göttingen, Math. phys. Klasse 1913, S. 582 bis 592.

[2]) Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 15 bis 28; Bd. 3 (1923), S. 241 bis 251, 442 bis 451 usf.

[3]) Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 147 bis 149. Hier wird an einem Beispiel die Uebereinstimmung der vollständigen Theorie mit der Beobachtung nachgewiesen. Das Torsionsproblem [Trefftz, diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 64 bis 73] ist von den Annahmen über die Deformation unabhängig.

ins Auge gefaßt. Aeltere, sehr unbestimmte Beobachtungen der Mineralogen über sog. Gleitvorgänge an natürlichen Kristallen sind von M. Polanyi und einigen Schülern[1]) an künstlich kristallisierten Metallen wiederholt und zum Teil messend verfolgt worden. Andrerseits gelangten die gründlichen Untersuchungen von G. J. Taylor und Miß Elam[2]) zu außerordentlich präzisen Feststellungen. Diese waren es vor allem, die mir die Anregung boten, die mechanische Theorie der plastischen Formänderungen auf nicht-isotrope Körper auszudehnen.

Im folgenden wird zunächst die allgemeinste Form der Fließbedingung $F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z) =$ konst. erörtert, die in einem Körper von gegebener Kristallsymmetrie möglich ist. Es heben sich dann, im Hinblick auf die Beobachtungen, zwei spezielle Formulierungen besonders ab. Die eine gibt, ähnlich wie bei isotropen Körpern, $F$ als einen quadratischen Ausdruck in den sechs Spannungskomponenten; die zweite läßt die Größe der Schubspannung für gewisse kristallographisch ausgezeichnete Achsenpaare als maßgebend erscheinen. Alle bisherigen Versuchsergebnisse werden zwanglos in der einen oder der andern Weise erklärt — in manchen Fällen bleibt es unentschieden, welche der beiden Erklärungen die zutreffendere ist. Es wäre aber durchaus verfrüht, hier etwas Abschließendes sagen zu wollen in einem Zeitpunkt, in dem fast keine anderen Beobachtungen als solche über einachsige Spannungszustände vorliegen. Man wird erst sorgfältig überlegte Versuche unter allgemeineren Bedingungen, analog den Göttinger Versuchen mit isotropem Material, vornehmen müssen, ehe man über die Gestalt der Fließbedingung für Kristalle volle Klarheit gewinnen kann.

Den Hauptpunkt der hier wiedergegebenen Theorie erblicke ich aber nicht in den Feststellungen über die Spannungsfunktion, die konstant gesetzt die Fließbedingung liefert, sondern in einer — wie ich glaube — grundlegenden Bemerkung über den Zusammenhang von Fließbedingung und Deformationsvorgang. Bei einem plastisch deformablen Körper muß man die sechs Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit in jedem Punkt als bis auf einen gemeinsamen Faktor durch die Spannungen in diesem Punkt gegeben ansehen. Ich behaupte nun, daß die sechs Ableitungen der Spannungsfunktion $F$ nach den Spannungskomponenten eben die Größen liefern, denen die Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit proportional sind. Mit anderen Worten heißt das: Die Formänderung regelt sich derart, daß die pro Zeiteinheit von ihr verzehrte Arbeit unverändert bleibt gegenüber kleinen Variationen der Spannungen innerhalb der Fließgrenze. Da die Elastizitätstheorie einen ähnlichen Zusammenhang zwischen den Deformationsgrößen und dem elastischen Potential lehrt, so nenne ich die Spannungsfunktion $F$ auch das »plastische Potential« oder »Fließpotential«. Nimmt man meine Hypothese an, so kann man aus Beobachtungen über den Formänderungsvorgang auf die Fließbedingung schließen und umgekehrt. Beispielsweise ergibt sich für den isotropen Körper die Unmöglichkeit der Mohrschen Fließbedingung $\tau_{max} =$ konst., sobald man festgestellt hat, daß bei einem Spannungszustand mit drei voneinander verschiedenen Spannungskreisen eine nicht-ebene plastische Deformation eintritt. Allgemein ist eine Fließbedingung der oben erwähnten »zweiten Art« (konstante Schubspannung für ausgezeichnete Achsenpaare) immer damit verknüpft, daß die Deformation in jedem Punkt eine ebene, zweidimensionale, ist — ungefähr dem entsprechend, was die Kristallographen in etwas unklarer Weise als »Gleitung« bezeichnen.

In den Abschn. **1** und **2** des folgenden Aufsatzes werden die theoretisch möglichen Formen der Fließbedingung erörtert. Der Abschn. **3** untersucht die Frage, mit welchem Recht man etwa die quadratische Fließbedingung als Bedingung »konstanter Gestaltänderungsenergie« deuten darf. Nachdem dann in Abschn. **4** die Spezialisierung der Formeln für den einachsigen Spannungszustand gegeben ist, läßt sich in Abschn. **5** ein Vergleich der verschiedenen Ansätze mit den bisher vorliegenden Versuchsergebnissen durchführen. In Abschn. **6** werden einige kinematische Fragen, die in den bisherigen Darstellungen die größten Unklarheiten aufwiesen, behandelt, worauf dann Abschn. **7** die schon erwähnte Haupthypothese über den Zusammenhang zwischen Fließbedingung und

[1]) Vergl. H. Mark, M. Polanyi und E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. Bd. 12 (1924), S. 58 bis 116. M. Polanyi ebda. Bd. 17 (1923), S. 42 bis 53 und Zeitschr. f. Kristallographie Bd. 61 (1925), S. 49 bis 57. E. Schmid, Proceed. of the congr. of appl. mech. Delft 1924, S. 342 bis 353. Von den sehr zahlreichen späteren Arbeiten werden einzelne im folgenden angeführt.

[2]) Eine Zusammenfassung der Resultate gibt G. J. Taylor in Verhandl. d. 2. Intern. Kongr. für techn. Mechanik Zürich 1926, S. 46 bis 52. Hier auch die genauen Angaben über die Originalarbeiten.

Formänderung entwickelt. In dem Schlußabschnitt **8** sind kurze Andeutungen über die Aufstellung der vollständigen Bewegungsgleichungen für die hier betrachteten Kontinua gegeben, ohne daß damit eine Erledigung dieses, in bestimmter Richtung sehr schwierigen Problems versucht wird.

**1. Allgemeine Form der Fließbedingung.** Aus den Grundannahmen über das Verhalten der festen Körper im Fließzustande folgt, daß sie in zweierlei Hinsicht den zähen Flüssigkeiten gleichen: 1. Die Spannung in einem Punkt zerfällt in einen allseits gleichen Druck (den hydrostatischen oder hydraulischen Druck, der aber auch negativ sein kann) und eine zusätzliche Spannung mit dem mittleren Druck Null, die allein durch die Deformationsgeschwindigkeit bestimmt wird. 2. Die Divergenz des Geschwindigkeitsvektors verschwindet (Unzusammendrückbarkeit) und diese Bedingung muß zur Elimination des mittleren Druckes aus den Bewegungsgleichungen dienen.

Andrerseits besteht der charakteristische Unterschied gegenüber den zähen Flüssigkeiten darin, daß als Zusatzspannung nicht jeder beliebige Spannungszustand mit verschwindendem mittleren Druck auftreten kann. Ein gezogener Kupferstab beginnt erst zu fließen, wenn die Zugkraft einen gewissen Wert erreicht hat, den sie dann während des Fließens annähernd beibehält. Die Gesamtheit der Spannungszustände, bei denen das Fließen möglich ist, bezeichnet man als die Fließgrenze (auch Elastizitätsgrenze); ihre Kennzeichnung durch eine Gleichung zwischen den sechs Spannungskomponenten bildet die »Fließbedingung«.

Zwei Anmerkungen sind hier zu machen, um Mißverständnisse auszuschließen. Daß die Divergenz der Geschwindigkeit gleich Null gesetzt wird, bedeutet nicht die Annahme der Volumbeständigkeit im strengsten Sinn. Es kommt darin nur die Beobachtung zum Ausdruck, daß die Volumänderungen von der Größenordnung der elastischen Deformationen bleiben, die denen des Fließens gegenüber verschwindend klein sind. Die Voraussetzung hingegen, daß die Spannung während des Fließens an der Elastizitätsgrenze verharrt, ist ein bewußter Verzicht darauf, die wohlbekannte Erscheinung der »Verfestigung« mit der Plastizitätstheorie zu erfassen. Da man vermuten muß, daß die Verfestigung mit einer Aenderung des Gefüges zusammenhängt, wird es wohl kaum möglich sein, ihr im Rahmen der Kontinuitätsmechanik gerecht zu werden.

Versuchen wir nun eine Fließbedingung aufzustellen, so werden wir unser Augenmerk solchen Funktionen der sechs Spannungsgrößen, der drei Normalspannungen $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ und der drei Schubspannungen $\tau_x$, $\tau_y$, $\tau_z$, zuwenden, die zwei Forderungen erfüllen:

1. Die Funktionswerte bleiben ungeändert, wenn man dem Spannungszustand eine allseits gleiche Normalspannung (einen hydrostatischen Druck) hinzufügt.

2. Die Funktionswerte bleiben ungeändert, wenn man das zugrundegelegte Koordinatenkreuz durch ein kristallographisch gleichwertiges ersetzt.

Die zweite dieser Forderungen erscheint selbstverständlich und unausweichlich. Für den Fall isotroper Körper besagt sie, daß der betrachtete Ausdruck von der Wahl der Koordinatenachsen unabhängig sein muß. Die erste Forderung ist naheliegend, wenn man bedenkt, welche besondere Rolle der hydrostatische Anteil der Gesamtspannung spielt. Uebrigens soll nicht angenommen werden, daß sie in aller Strenge für die Fließgrenze bei allen Körpern erfüllt ist. Aber indem wir Spannungsfunktionen aufsuchen, die dieser Bedingung genügen und ihren Wert dann als höchstens »langsam veränderlich« mit dem mittleren Druck ansehen, glauben wir das Wesentliche der Fließerscheinung erfaßt zu haben.

Wir fragen zunächst nach einer quadratischen Funktion der Spannungskomponenten, die den aufgestellten Forderungen genügt, da aus theoretischen und experimentellen Gründen zu vermuten ist, daß den Ausdrücken zweiten Grades hier eine besondere Rolle zufällt. Die allgemeinste Form lautet in üblicher Schreibweise:

$$F = \tfrac{1}{2}\left(k_{11}\,\sigma_x^2 + k_{22}\,\sigma_y^2 + \ldots + k_{66}\,\tau_z^2\right) + k_{12}\,\sigma_x\,\sigma_y + \ldots + k_{14}\,\sigma_x\,\tau_x + \ldots k_{56}\,\tau_y\,\tau_z \qquad (1).$$

Sie enthält 21 verschiedene Koeffizienten $k$. Verlangt man (erste Forderung), daß $F$ ungeändert bleibt, wenn $\sigma_x$ durch $\sigma_x - p$ und zugleich $\sigma_y$, $\sigma_z$ durch $\sigma_y - p$ bzw. $\sigma_z - p$ ersetzt wird, so erhält man durch Einsetzen 6 Gleichungen zwischen den $k$, z. B.

$$k_{11} + k_{12} + k_{13} = 0 \qquad (2).$$

Die übrigen fünf Gleichungen gehen aus dieser hervor, wenn man den ersten Index der einzelnen Glieder der Reihe nach durch 2, 3 ... 6 ersetzt. Der quadratische Ausdruck, der der Forderung (1) genügt, enthält daher nur 15 unabhängige Koeffizienten. Man

kann ihn unmittelbar hinschreiben, indem man an Stelle der Größen $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ ihre Differenzen als Veränderliche einführt und beachtet, daß die Summe der Differenzen Null ist. Wir schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} F = -{}^1/_2\,[k_{12}(\sigma_x-\sigma_y)^2 + k_{23}(\sigma_y-\sigma_z)^2 + k_{31}(\sigma_z-\sigma_x)^2] - \tau_x\,[k_{24}(\sigma_x-\sigma_y) + k_{34}(\sigma_x-\sigma_z)] \\ \quad - \tau_y\,[k_{35}(\sigma_y-\sigma_z) + k_{15}(\sigma_y-\sigma_x)] - \tau_z\,[k_{16}(\sigma_z-\sigma_x) + k_{26}(\sigma_z-\sigma_y)] + k_{45}\,\tau_x\,\tau_y \\ \quad + k_{56}\,\tau_y\,\tau_z + k_{64}\,\tau_z\,\tau_x + {}^1/_2\,(k_{44}\,\tau_x^2 + k_{55}\,\tau_y^2 + k_{66}\,\tau_z^2) \end{array}\right\} \quad (3).$$

Man erkennt, daß hier genau 15 unabhängige Koeffizienten auftreten und daß der Ausdruck ungeändert bleibt, wenn man die drei $\sigma$ um eine additive Konstante verändert. Also ist (3) die allgemeinste quadratische Form, die der ersten unserer Forderungen genügt. Die Bezeichnung der Koeffizienten ist so gewählt, daß sie mit (1) übereinstimmt.

In dem allgemeinsten Fall der Kristallstruktur, bei der ein einziges Achsenkreuz eindeutig ausgezeichnet erscheint (triklines System), so daß unsere Forderung 2 leer ist, läßt sich der Ausdruck (3) nicht weiter vereinfachen. In dem beschränktesten Fall der Isotropie geht er, wie wir noch sehen werden, in den von mir 1913 angegebenen

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\,(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

über. Dem Standpunkt meiner damaligen Veröffentlichung entsprechend wäre

$$F = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als Fließbedingung anzusehen. Da die 1925 veröffentlichten Versuche von Lode[1]) einen gewissen Gang der $F$-Werte mit dem Wert der mittleren Normalspannung ${}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ zu ergeben schienen, habe ich in einem Vortrag im Juli 1925 die Hypothese für isotrope Körper dahin erweitert, daß $F$ eine (schwach veränderliche) Funktion von $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ sei. Diesen Gedanken hat — unabhängig von mir — F. Schleicher[2]) weiter ausgeführt. Inzwischen hat sich herausgestellt, daß eine genügende empirische Grundlage zur Annahme einer bestimmten Veränderlichkeit des $F$ nicht vorliegt. Da die Verhältnisse bei kristallinischen Körpern sicher noch viel ungeklärter sind, erscheint mehr als eine ganz rohe Hypothese hier noch weniger berechtigt. Es wird daher wohl bis auf weiteres das richtige sein, die Fließbedingung des allgemeinsten Kristalles in der Form (5) anzusetzen, wobei unter $F$ entweder der in (3) gegebene Ausdruck oder der noch zu besprechende allgemeinere, nicht quadratische, zu verstehen ist. Im ersteren Fall hängt der Eintritt des Fließens von 15 Konstanten ab, deren Zahl sich freilich mit zunehmender Symmetrie des Kristalls bedeutend vermindert.

Ob der Ansatz (3) zutrifft oder nicht, kann natürlich nur durch umfassende Versuche entschieden werden. Was aus dem bisherigen Stand der Beobachtung an Kristallen folgt, wird weiter unten dargelegt. Welche allgemeinere Formulierung möglich ist, ist für den Fall der Isotropie in meiner Arbeit von 1913 schon dargestellt. Es gibt dann bekanntlich drei unabhängige Spannungsinvarianten, bei Festhaltung der Forderungen 1 und 2, d. h. Funktionen, die ihren Wert nicht ändern, wenn man die Spannungskomponenten für irgend ein zweites Achsenkreuz in sie einführt. Die eine ist die Summe der drei Normalspannungen $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, die zweite besteht aus der Summe der drei Ausdrücke von der Form $(\sigma_x\,\sigma_y - \tau_z^2)$, die dritte ist die Determinante dritter Ordnung, die in bekannter Weise aus den sechs Spannungsgrößen gebildet werden kann. Natürlich ist auch jede Funktion dieser drei Invarianten $J_1$, $J_2$, $J_3$ wieder eine (abgeleitete) Invariante. Wie bekannt, liefern die drei $J$ auch die kubische Gleichung, deren Wurzeln die drei Hauptspannungen sind, $\sigma^3 - J_1\,\sigma^2 + J_2\,\sigma - J_3 = 0$, so daß man weiterhin sagen kann: Jede symmetrische (d. h. von der Nummerierung der Variablen unabhängige) Funktion der drei Hauptspannungen $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ ist eine Invariante. Will man nun den Funktionenkreis auf solche Funktionen beschränken, die bei Hinzufügung einer allseits gleichen Spannung $p$ unverändert bleiben, so verringert sich die Zahl der unabhängigen Invarianten auf zwei. Die eine ist $H = J_2 - {}^1/_3\,J_1^2$, und das ist bis auf den Faktor $-{}^1/_6$ gleich dem Ausdruck (4). Die andere entsteht, indem man von der Determinante $J_3$ den Ausdruck ${}^1/_3\,J_1\,(J_2 - {}^2/_9\,J_1)$ abzieht, wobei man erhält:

$$G = 2\,\tau_x\,\tau_y\,\tau_z + {}^1/_{27}\,(\sigma_x + \sigma_y - 2\,\sigma_z)\,[(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 9\,\tau_z^2] + \ldots + \ldots \quad . \quad (6).$$

Jede Funktion von $F$ und $G$ gleich einer Konstanten gesetzt, liefert eine mögliche Fließbedingung des isotropen Körpers, und zugleich ist dies der allgemeinste überhaupt mög-

[1]) W. Lode, diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 142 bis 144 und Zeitschr. f. Phys. Bd. 36 (1926), S. 913 bis 939.

[2]) F. Schleicher, diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 199 bis 216.

liche Ansatz. Man kann ihm eine andere, in manchen Fällen vorteilhaftere Gestalt geben, indem man die drei »Hauptschubspannungen« $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ einführt:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \qquad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

deren Summe identisch Null ist. Da die drei $\tau$ nur von den Differenzen der $\sigma$ abhängen, andrerseits die drei $\sigma$ bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmen, gilt auch: Die allgemeinste Fließbedingung des isotropen Körpers wird geliefert durch irgend eine Funktion von $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, deren Wert von der Nummerierung der Hauptachsen unabhängig ist. Eine solche Funktion (und zwar die einzige zweiten Grades) ist die Quadratsumme $\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$, die bis auf einen Zahlenfaktor mit (4) übereinstimmt. Als andern speziellen Fall kennen wir die Guest-Mohrsche Bedingung $\tau_{max} =$ konst., bei der als Fließfunktion der größte Betrag der drei Hauptschubspannungen $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ auftritt.

Bei kristallinischen Körpern hat die Forderung 2 für die Fließbedingung nur eine viel schwächere Wirkung, da lediglich Invarianz gegenüber endlich viel Drehungen des Koordinatenkreuzes verlangt wird. Dies hat zur Folge, daß es statt der drei Invarianten des isotropen Körpers hier sechs voneinander unabhängige Spannungsfunktionen gibt, die bei den zulässigen Drehungen unverändert bleiben, und daher fünf unabhängige Funktionen, die auch der Bedingung 1, Invarianz gegen Zufügung eines Kugeltensors, genügen. Im Falle des triklinen Systems, bei dem, wie wir schon gesehen haben, die Bedingung 2 leerläuft, lassen sich die fünf Funktionen ohne weiters angeben. Es sind die drei Schubspannungen $\tau_x$, $\tau_y$, $\tau_z$ und zwei Differenzen der Normalspannungen, etwa $\sigma_y - \sigma_z$ und $\sigma_z - \sigma_x$ (die dritte Differenz ist dann schon ableitbar). Jede beliebige Funktion dieser fünf Größen liefert eine mögliche Fließbedingung eines triklinen Kristalls. Wie sich die Bedingungen bei anderen Kristallsystemen gestalten, werden wir im folgenden Abschnitt überlegen. Nur eine besondere Form der Fließbedingung für ein beliebiges Krystallsystem soll hier schon erwähnt werden.

Sind zwei zueinander senkrechte Richtungen im Raum gegeben, so kann man für sie die Schubspannungskomponente bestimmen. Nimmt man etwa die beiden Richtungen zur $x'$- und $y'$-Achse eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes, so hat man eben $\tau_{z'}$ zu berechnen, indem man entweder von der zur $x'$-Richtung gehörigen Spannung die $y'$-Komponente oder von der der $y'$-Richtung zugeordneten die $x'$-Komponente bestimmt. Im allgemeinen, d. h. bei nicht triklinen Kristallen, ist $\tau_{z'} =$ konst. keine der Forderung 2 genügende Fließbedingung. Unterwirft man aber das gegebene Achsenpaar allen jenen Drehungen, die den Symmetrie-Eigenschaften des Kristalls entsprechen, bildet für jede Lage des Achsenpaares die Schubspannung und bezeichnet den größten Betrag der so gebildeten Größen mit $\tau_{max}$, so ist $\tau_{max} =$ konst. tatsächlich eine Fließbedingung, die beide Forderungen 1 und 2 erfüllt. Denn keine Schubspannung ändert sich, wenn man den Spannungszustand um einen hydrostatischen Druck verändert und eine zulässige Drehung des Koordinatensystems verändert $\tau_{max}$ auch nicht. Man sieht, daß die Bedingung im Falle des isotropen Körpers, wo alle Drehungen zulässig sind, in die Guest-Mohrsche Hypothese übergeht. Wir wollen sie im kristallinischen Fall als die »verallgemeinerte Schubspannungsbedingung« bezeichnen. Zu ihrem analytischen Ausdruck gelangt man wie folgt.

Ein ausgezeichnetes Achsenpaar möge mit den drei Hauptspannungsrichtungen die Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ und $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ bilden. Dann ist die zugehörige Schubspannung

$$\tau = \sigma_1 \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \sigma_2 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \sigma_3 \cos\alpha_3 \cos\gamma_3 \quad . \; . \; . \; . \quad (8),$$

wobei

$$\cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8').$$

Man läßt nun die $\alpha$, $\beta$ alle Werte durchlaufen, die kristallographisch gleichwertigen Lagen des ursprünglichen Achsenpaares entsprechen und bezeichnet mit $\tau_{max}$ den größten Betrag der Ausdrücke (8). Dann ist

$$\tau_{max} = \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

die »verallgemeinerte Schubspannungsbedingung«.

**2. Spezialisierung für bestimmte Kristallsymmetrien.** Der allgemeine Ausdruck (3) wird, wie schon erwähnt, bedeutend vereinfacht, wenn es sich um Kristalle von mehr oder weniger weitgehender Symmetrie handelt und wir unsere Forderung 2. berücksichtigen. Um diese Vereinfachung und die analogen Ueberlegungen für alle anderen Fließbedingungen durchzuführen, brauchen wir das Formelsystem, durch das sich die

6 Komponenten der Spannung — wie die jedes andern symmetrischen Tensors — auf neue Achsen transformieren. In dem unten folgenden Schema (10) steht der Klammerausdruck $(y\,z')$ für den cos des Winkels zwischen der alten $y$- und der neuen $z$-Achse, $(z\,y')$ für den cos des Winkels zwischen der alten $z$- und der neuen $y$-Achse usf. Die in der ersten Zeile stehenden Ausdrücke geben die Koeffizienten der alten Komponenten $\sigma_x$, $\sigma_y$ ... $\tau_z$ in der Formel für die neue Komponente $\sigma_{x'}$, usf.

Gl. (10).

| | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\sigma_z$ | $\tau_x$ | $\tau_y$ | $\tau_z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_x'$ | $(xx')^2$ | $(yx')^2$ | $(zx')^2$ | $2\cdot(yx')(zx')$ | $2\cdot(zx')(xx')$ | $2\cdot(xx')(yx')$ |
| $\sigma_y'$ | $(xy')^2$ | $(yy')^2$ | $(zy')^2$ | $2\cdot(yy')(zy')$ | $2\cdot(zy')(xy')$ | $2\cdot(xy')(yy')$ |
| $\sigma_z'$ | $(xz')^2$ | $(yz')^2$ | $(zz')^2$ | $2\cdot(yz')(zz')$ | $2\cdot(zz')(xz')$ | $2\cdot(xz')(yz')$ |
| $\tau_x'$ | $(xy')(xz')$ | $(yy')(yz')$ | $(zy')(zz')$ | $(yz')(zy')+(yy')(zz')$ | $(zz')(xy')+(zy')(xz')$ | $(xz')(yy')+(xy')(yz')$ |
| $\tau_y'$ | $(xz')(xx')$ | $(yz')(yx')$ | $(zz')(zx')$ | $(yx')(zz')+(yz')(zx')$ | $(zx')(xz')+(zz')(xx')$ | $(xx')(yz')+(xz')(yx')$ |
| $\tau_z'$ | $(xx')(xy')$ | $(yx')(yy')$ | $(zx')(zy')$ | $(yy')(zx')+(yx')(zy')$ | $(zy')(xx')+(zx')(xy')$ | $(xy')(yx')+(xx')(yy')$ |

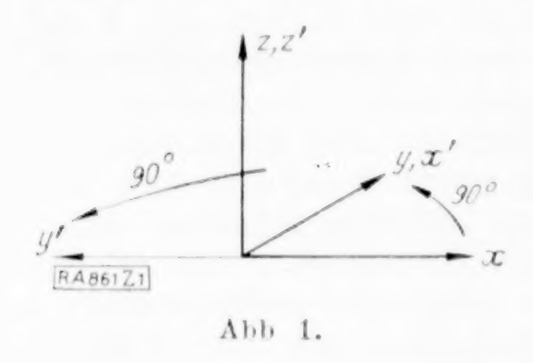



Abb. 1.

Dreht man beispielsweise das Achsenkreuz um die $z$ Achse durch 90°, so daß die $x'$-Achse mit der $y$-Achse zusammenfällt (Abb. 1), so hat man $(y\,x') = (z\,z') = 1$, $(x\,y') = -1$, alle anderen cos gleich 0. Das vorstehende Schema (10) ergibt dann

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_y, & \sigma_{y'} &= \sigma_x, & \sigma_{z'} &= \sigma_z \\ \tau_{x'} &= -\tau_y, & \tau_{y'} &= \tau_x, & \tau_{z'} &= -\tau_z \end{aligned}\right\} \quad (11\text{a}).$$

Beträgt der Drehwinkel 180°, so erhält man in der gleichen Weise

$$\sigma_{x'} = \sigma_x, \quad \sigma_{y'} = \sigma_y, \quad \sigma_{z'} = \sigma_z, \quad \tau_{x'} = -\tau_x, \quad \tau_{y'} = -\tau_y, \quad \tau_{z'} = \tau_z \quad . \quad (11\text{b}).$$

Dieselbe Transformation entspricht einer Spiegelung an der $x\,y$-Ebene, d. h. einer Vertauschung der positiven mit der negativen $z$-Richtung. Bei einem Drehwinkel von 60° oder 120° hat man für die Richtungs-cos die Werte $\pm\,^1/_2$, $\pm\,^1/_2\sqrt{3}$ usf., und die Umrechnungsformeln lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{x'} = \frac{1}{4}\sigma_x + \frac{3}{4}\sigma_y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_z, \quad \sigma_{y'} = \frac{3}{4}\sigma_x + \frac{1}{4}\sigma_y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_z, \quad \sigma_{z'} = \sigma_z \\ &\tau_{x'} = \pm\frac{1}{2}\tau_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_y, \quad \tau_{y'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_x \pm \frac{1}{2}\tau_y, \quad \tau_{z'} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}(\sigma_y - \sigma_x) - \frac{1}{2}\tau_z \end{aligned}\right| \quad (11\text{c}).$$

Das obere Zeichen gilt für 60°, das untere für 120° Drehwinkel. Diese Formeln reichen für die Behandlung des regulären (tesseralen) und des hexagonalen Systems aus.

a) Reguläres System (Steinsalz, Kupfer, Aluminium, Eisen). Das reguläre Kristallsystem besitzt drei zueinander senkrechte, eindeutig ausgezeichnete Achsen, die miteinander beliebig vertauschbar sind. Zulässige Drehungen, die den Ausdruck (3) oder allgemeiner die Fließfunktion unverändert lassen müssen, sind also alle Drehungen um eine der drei Achsen durch 90° oder 180°. Führen wir zunächst eine Drehung um die $z$-Achse durch 180° (oder eine Spiegelung an der $x\,y$-Ebene) nach (11b) aus, so kehren in dem Ausdruck (3) diejenigen Glieder, die $\tau_x$ oder $\tau_y$ in der ersten Potenz enthalten, ihre Vorzeichen um. Die Invarianz von (3) erfordert also, daß die Koeffizienten dieser Glieder, d. s. $k_{24}$, $k_{34}$, $k_{35}$, $k_{15}$, $k_{56}$ und $k_{64}$, verschwinden. Dreht man um die $x$- oder $y$-Achse, so kommen noch die Bedingungen $k_{16} = k_{26} = k_{45} = 0$ hinzu. Der Ausdruck (3) vereinfacht sich also schon auf die ersten drei und die letzten drei Summanden allein. Bei einer Drehung um die $z$-Achse durch 90° vertauschen sich nach (11a) die Ausdrücke $(\sigma_y - \sigma_z)^2$ und $(\sigma_x - \sigma_z)^2$, ebenso $\tau_x^2$ und $\tau_y^2$. Es muß daher $k_{23} = k_{31}$ und $k_{44} = k_{55}$ sein. Drehung um die $y$-Achse führt dann in derselben Weise zu $k_{12} = k_{23}$ und $k_{44} = k_{66}$. Weitere Einschränkungen finden sich nicht. Das Ergebnis ist also, daß es überhaupt nur zwei verschiedene Koeffizienten geben kann, einen für die Quadrate der Differenzen der Normalspannungen und einen für die Quadrate der Schubspannungen. Der quadratische Ausdruck (3) für das reguläre Kristallsystem nimmt somit, wenn wir $\varkappa$ für $-k_{44} : k_{12}$ und $k_{12} = -2$ setzen, die Form an:

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \varkappa\,(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Von dem Ansatz (4) für isotrope Körper unterscheidet sich der neue nur dadurch, daß an die Stelle des Zahlenfaktors 6 eine Materialkonstante $\varkappa$[1]) getreten ist. Bei Einführung der »Hauptschubspannungen« $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ nach (7) geht bekanntlich (4) über in $4(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)$. Daher läßt sich der Ausdruck (12) auch in den beiden Formen:

$$F = \frac{2\varkappa}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) + \frac{6-\varkappa}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$$
$$= 4(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) + (\varkappa - 6)[\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

schreiben.

Stellen wir uns jetzt die weitere Aufgabe, für das reguläre System fünf unabhängige Spannungsgrößen aufzusuchen, durch die sich jede den Forderungen 1 und 2 genügende Funktion darstellen läßt, so finden wir zwei von ihnen schon in den beiden Bestandteilen von $F$:

$$J_1 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2, \qquad J_2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 \quad . \quad (13\,a).$$

Jeder dieser Ausdrücke für sich bleibt ungeändert bei Hinzufügung eines Kugeltensors und bei Drehungen durch 90° oder 180° usf. um eine der Koordinatenachsen — was ja unmittelbar aus der Willkürlichkeit von $\varkappa$ in (12) hervorgeht. Weitere Ausdrücke zweiten Grades kann es nach den Ueberlegungen, die zur Feststellung von $F$ in (12) geführt haben, nicht geben. Es liegt aber nahe, das gleiche Ausscheidungsverfahren auf die allgemeine Form dritten Grades anzuwenden, d. h. die Bedingungen zu ermitteln, denen die Koeffizienten einer solchen Form genügen müssen, damit die Forderungen 1 und 2 erfüllt werden. Die Rechnung, die an sich sehr umständlich sein kann, gestaltet sich einfach, wenn man es zunächst mit den einzelnen Bestandteilen des Ausdruckes $G$ versucht, der in (6) als Invariante dritten Grades gegen alle Drehungen und gegen Hinzufügung eines Kugeltensors gefunden wurde. In der Tat zeigt sich, daß jede der Funktionen

$$\left.\begin{aligned} J_3 &= (\sigma_x - \sigma_y)^3 + (\sigma_y - \sigma_z)^3 + (\sigma_z - \sigma_x)^3, \qquad J_4 = \tau_x \tau_y \tau_z, \\ J_5 &= (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z)\,\tau_z^2 + (\sigma_y + \sigma_z - 2\sigma_x)\,\tau_x^2 + (\sigma_z + \sigma_x - 2\sigma_y)\,\tau_y^2 \end{aligned}\right\} \quad (13\,b)$$

den beiden Forderungen genügt, wenn man sie, abgesehen von der Addition eines $p$ zu den drei $\sigma$, den durch (11a) und (11b) bestimmten Transformationen (und den analogen für die anderen Achsrichtungen) unterwirft. Da man leicht erkennt, daß die fünf Ausdrücke (13a) und (13b) voneinander funktional unabhängig sind (eine nicht verschwindende Funktionaldeterminante besitzen), es ferner, wie wir wissen, nicht mehr als fünf unabhängige Invarianten geben kann, so haben wir mit (13a) und (13b) die Aufzählung bereits geleistet. Die allgemeinste Fließbedingung für einen regulär kristallisierenden Körper erhält man durch Konstantsetzen einer beliebigen Funktion von $J_1$ bis $J_5$.

Eine spezielle Fließbedingung, die die Form der verallgemeinerten Schubspannungshypothese besitzt, und die man bequemer nicht auf die Invarianten (13a) und (13b) zurückführt, ist für gewisse reguläre Kristalle wie folgt formuliert worden. Man betrachtet als ausgezeichnete Achsenpaare die Verbindung einer »Würfeldiagonale« (Vektor vom Nullpunkt nach einem der Punkte mit den Koordinaten $\pm 1, \pm 1, \pm 1$) und einer dazu senkrechten »Flächendiagonale« (in einer Koordinatenebene liegendes Lot zur Würfeldiagonale [Abb. 2]). Es gibt im ganzen zwölf solcher Paare, die, wenn man sie durch die Koordinaten auf ihnen liegender Punkte kennzeichnet, folgende Zusammenstellung ergeben:

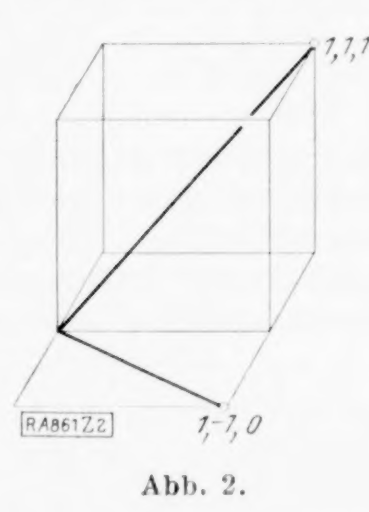


Abb. 2.

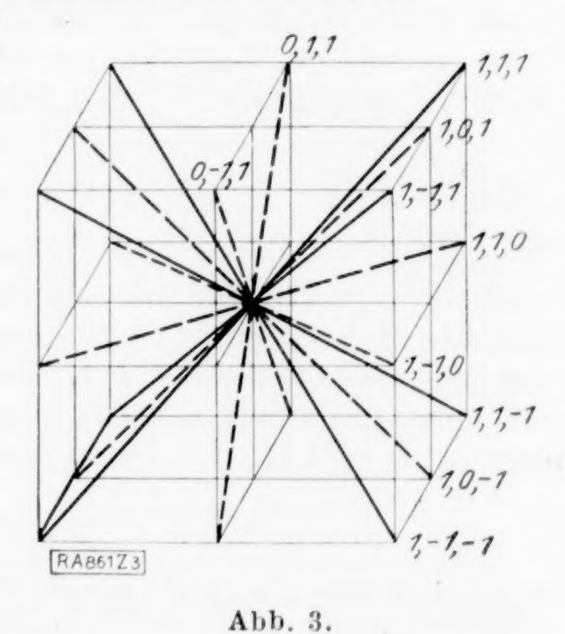


Abb. 3.

| 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 −1 | 1 1 −1 | 1 1 −1 | 1 −1 1 | 1 −1 1 | 1 −1 1 | −1 1 1 | −1 1 1 | −1 1 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 1 −1 | 1 0 −1 | 1 −1 0 | 0 1 1 | 1 0 1 | 1 −1 0 | 0 1 1 | 1 0 −1 | 1 1 0 | 0 1 −1 | 1 0 1 | 1 1 0 |

[1]) »Konstante« im Sinne der Mechanik, die natürlich noch von Temperatur usf. abhängen kann.

Je zwei untereinander stehende Richtungen (deren Richtungscosinus sich aus den angeschriebenen Zahlen durch Division mit $\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2}$ ergeben) stehen aufeinander senkrecht. Das erste der zwölf Paare ist in Abb. 2 angegeben, alle zwölf sind in Abb. 3 angedeutet. Unterwirft man eines der Achsenpaare allen Drehungen und Spiegelungen, die das reguläre System gestattet, so erhält man die elf übrigen. Die Gesamtheit der zwölf Paare bildet mithin eine für das Kristallsystem invariante Gruppe. Die absolut größte der zwölf Schubspannungskomponenten gleich einer Konstanten gesetzt, ergibt eine mögliche Fließbedingung.

Eine andere Schubspannungshypothese betrachtet als ausgezeichnete Paare die vier Würfeldiagonalen, die in der ersten Zeile des obenstehenden Schemas angeführt wurden, in Verbindung mit irgend einer zu der Diagonale senkrechten Richtung. Auch diese Gesamtheit ist invariant, d. h. sie enthält sämtliche aus einem beliebigen Paar durch zulässige Drehungen und Spiegelungen hervorgehenden Paare. Wir kommen auf die formelmäßige Darstellung der beiden Schubspannungshypothesen in Abschn. **4** zurück.

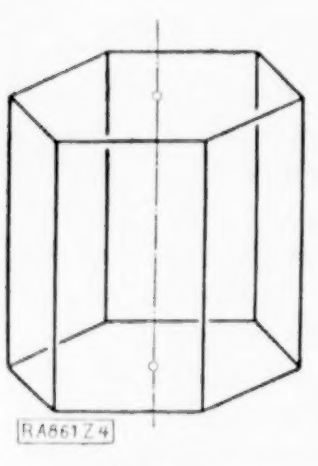


Abb. 4.

b) Hexagonales System (Kadmium, Zink). Das hexagonale Kristallsystem besitzt die Symmetrieverhältnisse eines geraden Prismas, dessen Querschnitt ein regelmäßiges Sechseck ist (Abb. 4). Nehmen wir die Prismenachse zur $z$-Achse, so sind zulässig nur Drehungen um die $z$-Achse, und zwar durch $60^0$, $120^0$, $180^0$.

Für die Invarianz des quadratischen Ausdrucks (3) haben wir nun zunächst, zufolge der Drehung durch $180^0$, wie oben die Bedingungen $k_{24} = k_{34} = k_{35} = k_{15} = k_{56} = k_{64} = 0$. Um die Drehungen durch $60^0$ und $120^0$ zu berücksichtigen, setzen wir $\sigma_x - \sigma_z = \varrho_x$, $\sigma_y - \sigma_z = \varrho_y$, so daß $\sigma_x - \sigma_y = \varrho_x - \varrho_y$. Mit diesen Abkürzungen lautet (3):

$$2\,F = -(k_{12} + k_{13})\,\varrho_x^2 - (k_{12} + k_{23})\,\varrho_y^2 + 2\,k_{12}\,\varrho_x\,\varrho_y + 2\,k_{16}\,\tau_z\,\varrho_x + 2\,k_{26}\,\tau_z\,\varrho_y + k_{66}\,\tau_z^2 + (k_{44}\,\tau_x^2 + 2\,k_{45}\,\tau_x\,\tau_y + k_{55}\,\tau_y^2)\,.$$

Bei einer Drehung durch $60^0$ oder $120^0$ transformieren sich nach (11c) die drei letzten, in einer Klammer zusammengefaßten Glieder für sich allein, da $\tau_{x'}$ und $\tau_{y'}$ nur von $\tau_x$ und $\tau_y$ abhängen. Die Invarianz ist erreicht, wenn $k_{44} = k_{55}$ und $k_{45} = 0$ gesetzt wird, da aus der vierten und fünften der Formeln (11c) sofort folgt, daß $\tau_{x'}^2 + \tau_{y'}^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2$. Die erste, zweite und letzte der Formeln (11c) verwandeln wir durch Einführung der $\varrho$ in die folgenden:

$$\varrho_{x'} = \frac{1}{4}\,\varrho_x + \frac{3}{4}\,\varrho_y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\tau_z, \quad \varrho_{y'} = \frac{3}{4}\,\varrho_x + \frac{1}{4}\,\varrho_y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\,\tau_z, \quad \tau_z = \mp \frac{\sqrt{3}}{4}\,\varrho_x \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\,\varrho_y - \frac{1}{2}\,\tau_z \qquad (11\,\mathrm{d}).$$

Diese Werte muß man an Stelle von $\varrho_{x'}\ \varrho_{y'}\ \tau_z$ oben in $2\,F$ einführen und die Bedingungen dafür aufstellen, daß die neuen Koeffizienten der sechs Glieder $\varrho_x^2$, $\varrho_y^2 \ldots \tau_z^2$ mit den alten übereinstimmen. Man schließt leicht aus Symmetriegründen, daß sich hierbei

$$k_{16} = k_{26} = 0\,, \qquad k_{13} = k_{23}$$

ergeben wird. In der Tat lautet unter dieser Voraussetzung die Bedingung dafür, daß der Koeffizient von $\varrho_x^2$ unverändert bleibt,

$$-(k_{12} + k_{13}) = -{}^{10}/_{16}\,(k_{12} + k_{13}) + {}^{6}/_{16}\,k_{12} + {}^{3}/_{16}\,k_{66}\,, \text{ d. i. } k_{66} = -4\,k_{12} - 2\,k_{13}\,,$$

und alle anderen fünf Bedingungen werden mit dieser gleichlautend. Demnach reduziert sich $F$, ebenso wie in den früheren Fällen, auf die sechs rein quadratischen Glieder, nur daß jetzt vier verschiedene Koeffizienten auftreten, nämlich $k_{12}$, $k_{23} = k_{13}$, $k_{44} = k_{55}$ und $k_{66} = -4\,k_{12} - 2\,k_{13}$. Denken wir uns $2\,F$ durch $-k_{13}$ dividiert und setzen wir

$$\frac{k_{12}}{k_{13}} = \lambda\,, \qquad -\frac{k_{44}}{k_{13}} = \varkappa\,, \qquad -\frac{k_{66}}{k_{13}} = 4\,\lambda + 2\,,$$

so erhalten wir die quadratische Fließfunktion des hexagonalen Kristallsystems in der Gestalt:

$$F = (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \lambda\,(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \varkappa\,(\tau_x^2 + \tau_y^2) + (4\,\lambda + 2)\,\tau_z^2 \quad . \ (14).$$

Der Eintritt des Fließzustandes ($F = \text{konst.}$) hängt also hier von drei Materialzahlen, $\varkappa$, $\lambda$ und der Konstanten rechts, ab.

Es sei hier noch angemerkt, daß man aus (12) und (14) die quadratische Fließbedingung für isotrope Körper zwangläufig gewinnt. Für diese Körper sind alle Drehungen des Achsenkreuzes zulässig, sowohl die durch $90^0$ wie die durch $60^0$ oder $120^0$. Daher muß der gesuchte Ausdruck sowohl die Form (12) wie die Form (14) aufweisen, also muß

$$\lambda = 1\,, \qquad 4\,\lambda + 2 = \varkappa\,,$$

demnach $\varkappa = 6$ sein. Es entsteht so wieder die in Abschn. **1** bereits angegebene Fließbedingung (4). Denn daß (4) gegen jede Drehung invariant ist, daß also keine weiteren Bedingungen zu erfüllen sind, folgt aus der ebenfalls schon mitgeteilten Identität (12′)

Ein vollständiges System von Invarianten für das hexagonale Kristallsystem herzuleiten, ist uns so leichter, als die hier auftretenden Transformationsformeln, wie schon erwäht, in zwei unabhängige Gruppen zerfallen. Die eine besteht aus der fünften und sechsten der Gl. (11c) und enthält nur die Schubkomponenten $\tau_x$, $\tau_y$; die andere wird durch die eben verwendete Gl. (11d) für die Variablen $\varrho_{x'}$ $\varrho_{y'}$ und $\tau_z$ dargestellt. Man entnimmt diesen letzten Gleichungen unmittelbar, daß $\varrho_{x'} + \varrho_{y'} = \varrho_x + \varrho_y$, hat also zunächst die lineare Invariante $\varrho_x + \varrho_y$, also

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,\mathrm{a}).$$

Drei quadratische Invarianten folgen, genau wie früher, aus (14), indem man nach den einzelnen Koeffizienten 1, $\varkappa$, $\lambda$ zerlegt:

$$J_2 = (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 2\tau_z^2, \quad J_3 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2, \quad J_4 = \tau_x^2 + \tau_y^2 \quad (15\,\mathrm{b}).$$

Wir haben so vier Invarianten, von denen die ersten drei aus den Variablen $\varrho_x$, $\varrho_y$, $\tau_z$ und nur die vierte aus $\tau_x$, $\tau_y$ gebildet ist. Mithin ist die letzte, die wir noch zu suchen haben, eine Funktion von $\tau_x$, $\tau_y$. Es muß eine symmetrische Funktion und wegen (11b) eine gerade sein. Man kann sie, nach einem bekannten allgemeinen Verfahren, finden, indem man eine beliebige Funktion $f(\tau_x\ \tau_y)$ ansetzt, sie der Reihe nach allen Transformationen unterwirft und die Werte addiert. Hier genügt es, wenn wir $f$ als gerade Funktion annehmen, $f(\tau_x, \tau_y) + f(\tau_x', \tau_y') + f(\tau_x'', \tau_y'')$ zu bilden, wobei $\tau_x'$, $\tau_y'$ die mit den oberen, $\tau_x''$, $\tau_y''$ die mit den unteren Vorzeichen in (11c) berechneten Transformierten bezeichnen. Führt man dies mit der Annahme $f = \tau_x^2\,\tau_y^2$ durch, so gelangt man zu $(\tau_x^2 + \tau_y^2)^2$, also zu nichts neuem. Dagegen führt der Ansatz $f = \tau_x^3\,\tau_y^3$ zum Ziel, man erhält als fünfte Invariante eine solche vom sechsten Grad:

$$J_5 = \tau_x\,\tau_y\,[3\,(\tau_x^2 + \tau_y^2)^2 - 16\,\tau_x^2\,\tau_y^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,\mathrm{c}).$$

Damit ist das Invariantensystem abgeschlossen.

Eine Fließbedingung vom Schubspannungstypus läßt sich für das hexagonale System in der Form aufstellen, daß als ausgezeichnete Achsenpaare alle Rechtwinkelkreuze mit der $z$-Achse als einem Schenkel gelten. Bildet der zweite Schenkel mit der $x$-Achse den Winkel $\alpha$, so hat man also das Maximum von $(\tau_x \sin\alpha + \tau_y \cos\alpha)^2$ gleich einer Konstanten zu setzen. Dieses Maximum ist aber $\tau_x^2 + \tau_y^2$, also unsere Invariante $J_4$. Es liegt hier ein Fall vor, in dem die Schubspannungshypothese mit der Annahme einer speziellen quadratischen Form [$\varkappa = \infty$ in (22)] als Fließfunktion zusammenfällt. Wir werden später sehen, daß diese Annahme noch etwas zu eng ist und zur Anpassung an die Beobachtungen einer gewissen Ergänzung bedarf.

**3. Formänderungs- und Gestaltänderungsenergie elastischer Körper.** Wir unterbrechen für einen Augenblick unsere Untersuchung der Plastizität, um einen oft ins Auge gefaßten Zusammenhang zwischen Fließbedingung und elastischer Arbeit zu untersuchen und auf seine richtige Bedeutung zurückzuführen.

Ein elastischer Körper ist bekanntlich dadurch definiert, daß zwischen Spannung und Deformation eine eindeutige Zuordnung besteht, die man gewöhnlich als eine lineare annimmt. Unter dieser (und nur unter dieser) Voraussetzung ist die bei der Formänderung pro Volumeinheit geleistete Arbeit gleich dem halben skalaren Produkt von Spannungs- und Deformationstensor, also auch gleich einem homogenen quadratischen Ausdruck in den sechs Spannungs- oder in den sechs Deformationskomponenten. Analog (1) kann daher für die elastische Arbeit gesetzt werden:

$$A = {}^1/_2\,(s_{11}\,\sigma_x^2 + s_{22}\,\sigma_y^2 + \ldots s_{66}\,\tau_z^2) + s_{12}\,\sigma_x\,\sigma_y + \ldots s_{14}\,\sigma_x\,\tau_x + \ldots s_{56}\,\tau_y\,\tau_z \quad (16).$$

Dabei sind natürlich auch die Koeffizienten $s$ der Bedingung unterworfen, daß $A$ seinen Wert beibehalten muß, wenn man die $\sigma_x \ldots \tau_z$ nach (10) durch solche $\sigma_x, \ldots \tau_z$, ersetzt, die sich auf ein zulässiges (kristallographisch gleichwertiges) Achsenkreuz beziehen. Für isotrope Körper muß der Ausdruck (16) gegenüber jeder Drehung invariant sein. Nun gibt es für die Spannungen (wie für jeden symmetrischen Tensor) nur eine lineare Invariante, nämlich die Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ und nur eine quadratische, nämlich die rechte Seite von (4) und (12). Daher muß $A$ für isotrope Körper die Form haben:

$$A = {}^1/_2\,\alpha\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + {}^1/_2\,\beta\,[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\,(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)] \quad (17),$$

und kann somit nur von zwei unabhängigen Konstanten $\alpha$, $\beta$ abhängen. In der üblichen Bezeichnung: $G$ = Gleitmodul, $m$ = Poissonsche Konstante, hat man, wie bekannt:

$$\alpha = \frac{m-2}{6(m+1)} \frac{1}{G}, \qquad \beta = \frac{1}{6} \frac{1}{G} \qquad \ldots \ldots \ldots (17').$$

Man pflegt häufig den ersten, von $\alpha$ abhängigen Bestandteil der Formänderungsarbeit die auf Volum- oder Dichteänderung verbrauchte Arbeit, den zweiten, von $\beta$ abhängigen Teil, den wir mit $A_G$ bezeichnen wollen, die Gestaltänderungsarbeit zu nennen. Dem liegt die Bemerkung zugrunde, daß bei einer Formänderung, die in einer allseits gleichen Dehnung (Aehnlichkeitstransformation) besteht, $A_G$ verschwindet, während bei einer volumbeständigen Deformation der erste Teil von $A$ gleich null wird.

Beltrami hat 1885 [1]) die Vermutung ausgesprochen, daß die Größe $A$ ein Maß der »Beanspruchung« in einem Punkte eines isotropen elastischen Körpers sei und daß bei einem bestimmten Wert von $A$ die Bruchgefahr eintritt. Hr. T. Huber hat nach einer Mitteilung von Hrn. A. Föppl [2]) (1924) in einer polnischen Abhandlung von 1904 die Beltramische Hypothese dahin modifiziert, daß nur im Falle eines mittleren Zuges, also bei $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z > 0$ der Wert von $A$, hingegen bei $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \leq 0$ der Wert von $A_G$ für den Eintritt der Bruchgefahr maßgebend sein soll. Daran, daß $A$ = konst. bzw. $A_G$ = konst. die während des Fließens des festen Körpers dauernd bestehende Spannungsbedingung sein soll, haben wohl beide Autoren nicht gedacht. Aber selbst wenn man von diesem Unterschied absieht und Bruchgrenze mit Elastizitätsgrenze gleichsetzt, stimmt weder der Beltramische noch der Hubersche Ansatz (der ja teilweise mit dem Beltramischen zusammenfällt) mit dem von mir 1913 gegebenen, der nach (4) und (17) in der Form

$$A_G = \text{konst. für alle } (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

geschrieben werden kann, inhaltlich überein. Gerade bei den im folgenden vorwiegend in Frage kommenden reinen Zugversuchen würde der Hubersche Standpunkt zu ganz abweichenden Ergebnissen führen. Neuerdings findet man oft Verwechslungen zwischen meiner Fließbedingung von 1913 und der Bedingung von Huber [3]). Der schon in **1** erwähnte spätere Ansatz von Hrn. Schleicher und mir, wonach $A_G$ eine Funktion von $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ sein soll, umfaßt sowohl den Beltramischen wie den Huberschen, wie auch meinen urprünglichen, als spezielle Fälle.

Es entsteht nun die Frage, wie man den Gedanken der Abspaltung einer reinen »Gestaltänderungsenergie« auf kristallinische Körper übertragen kann. Um sie zu beantworten, wollen wir den Spannungstensor mit den Komponenten $\sigma_x \ldots \tau_z$ zur Abkürzung mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen und den Deformationstensor, dessen Komponenten die Dehnungen $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, $\varepsilon_z$ und die halben Winkeländerungen $^1/_2\,\gamma_x$, $^1/_2\,\gamma_y$, $^1/_2\,\gamma_z$ sind, mit $\mathfrak{D}$. Die Formänderungsarbeit ist dann das halbe skalare Produkt dieser beiden Tensoren, definiert durch

$$A = {}^1/_2\, \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{D} = {}^1/_2 \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z\right] \quad . \; . \; (18).$$

Der früher angeführte Ausdruck (16) folgt aus dieser Definition, wenn man die lineare Spannungs-Zerrungs-Beziehung in der Form ansetzt:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = s_{11}\,\sigma_x + s_{12}\,\sigma_y + s_{13}\,\sigma_z + s_{14}\,\tau_x + s_{15}\,\tau_y + s_{16}\,\tau_z \\ \varepsilon_y = s_{21}\,\sigma_x + s_{22}\,\sigma_y + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots s_{26}\,\tau_z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_z = s_{61}\,\sigma_x + s_{62}\,\sigma_y + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots s_{66}\,\tau_z \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (19).$$

wobei $s_{ix} = s_{xi}$ gilt. Wir stellen nun die Aufgabe, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{D}$ in zwei einander entsprechende Teile zu zerlegen, so daß mit

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'', \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}''$$

die Komponenten $\varepsilon_x' \ldots {}^1/_2\,\gamma_z'$ von $\mathfrak{D}'$ sich aus den Komponenten $\sigma_x' \ldots \tau_z'$ von $\mathfrak{P}'$ nach (19) rechnen und ebenso die $\varepsilon_x'' \ldots {}^1/_2\,\gamma_z''$ aus den $\sigma_x'' \ldots \tau_z''$. Ferner verlangen wir, daß $\mathfrak{D}''$ eine volumbeständige Deformation sei, also $\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'' = 0$, und schließlich, daß die gesamte Arbeit $A$ in die beiden Bestandteile ${}^1/_2\,\mathfrak{P}' \cdot \mathfrak{D}' + {}^1/_2\,\mathfrak{P}''\,\mathfrak{D}''$ zerfallen soll. Da, wie aus der Definition (18) unmittelbar hervorgeht, für das skalare Produkt zweier Tensoren das distributive Gesetz gilt, so hat man zunächst

$$2\,A = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{D} = (\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'')\,(\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'') = \mathfrak{P}'\,\mathfrak{D}' + \mathfrak{P}''\,\mathfrak{D}'' + (\mathfrak{P}'\,\mathfrak{D}'' + \mathfrak{P}''\,\mathfrak{D}'),$$

[1]) Beltrami, opere matem. t IV Mailand 1920, S. 180—189.

[2]) A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. 1, S. 50. München und Berlin 1924.

[3]) Z. B. bei A. Nádai, Der bildsame Zustand der Werkstoffe, Berlin 1927, S. 49.

und die letzte der gestellten Forderungen besagt, daß der Klammerausdruck rechts verschwinden muß. Die beiden Summanden in der Klammer sind aber gleich groß: Denn man erhält den ersten, indem man die Gl. (19) für die zweimal gestrichenen Größen angeschrieben denkt und dann der Reihe nach mit $\sigma_x'$, $\sigma_y' \ldots \tau_z'$ multipliziert und addiert:

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{D}'' = s_{11}\, \sigma_x''\, \sigma_x' + s_{12}\, (\sigma_y''\, \sigma_x' + \sigma_x''\, \sigma_y') + \ldots,$$

und ganz analog entsteht der andere Summand, indem (19) für die einfach gestrichenen Größen angesetzt und dann mit den zweimal gestrichenen multipliziert wird:

$$\mathfrak{P}'' \mathfrak{D}' = s_{11}\, \sigma_x'\, \sigma_x'' + s_{12}\, (\sigma_y'\, \sigma_x'' + \sigma_x'\, \sigma_y'') + \ldots$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke (die natürlich auf der Bedingung $s_{\iota\varkappa} = s_{\varkappa\iota}$ beruht), ist so unmittelbar ersichtlich; dem mit der Tensorrechnung Vertrauten erscheint sie als eine Folgerung aus einfachen Rechenregeln.

Wir haben jetzt dafür zu sorgen, daß $\mathfrak{P}' \mathfrak{D}'' = 0$ wird. Schreiben wir das Produkt in der Form (18)

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{D}'' = \sigma_x'\, \varepsilon_x'' + \sigma_y'\, \varepsilon_y'' + \sigma_z'\, \varepsilon_z'' + \tau_x'\, \gamma_x'' + \tau_y'\, \gamma_y'' + \tau_z'\, \gamma_z''$$

und beachten, daß $\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'' = 0$, so sehen wir, daß dann der Ausdruck verschwindet, wenn $\mathfrak{P}'$ ein hydrostatischer Druck ist, d. h. $\sigma_x' = \sigma_y' = \sigma_z'$ und $\tau_x' = \tau_y' = \tau_z' = 0$. Auch ist dies der einzige Fall, für den das Verschwinden des Arbeitsausdruckes allein aus $\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'' = 0$ folgt. Damit haben wir die entscheidende Vorschrift für die Zerlegung gewonnen: Der Spannungstensor ist so zu spalten, daß der erste Teil ein allseits gleicher Druck oder Zug ist und dem zweiten Teil eine volumbeständige Deformation entspricht[1]). Dagegen bestehen im allgemeinen nicht die bei isotropen Körpern gültigen Eigenschaften, daß der zweite Spannungsbestandteil den Mitteldruck Null besitzt und daß dem ersten eine Deformation ohne Gestaltsänderung entspricht. Man kann daher von einer eigentlichen Zerlegung in Volum- und Gestaltänderungsarbeit nicht mehr sprechen, höchstens von einer Abspaltung der Gestaltänderungsarbeit, die in keiner anderen Weise möglich ist.

Um die Abspaltung auszuführen, berechnen wir zunächst die Komponenten des Deformationstensors $\mathfrak{D}'$, der einer allseits gleichen Zugspannung von der Größe $p$ entsprechen möge. Aus (19) folgt

$$\varepsilon_x' = p\,(s_{11} + s_{12} + s_{13}), \qquad \varepsilon_y' = p\,(s_{21} + s_{22} + s_{23}), \qquad \varepsilon_z' = p\,(s_{31} + s_{32} + s_{33})$$
$$\gamma_x' = p\,(s_{41} + s_{42} + s_{43}), \qquad \gamma_y' = p\,(s_{51} + s_{52} + s_{53}), \qquad \gamma_z' = p\,(s_{61} + s_{62} + s_{63}).$$

Dabei muß $p$ so bestimmt werden, daß

$$\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e,$$

weil nur dadurch die Erfüllung von $\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'' = 0$ gewährleistet wird. Den Wert der Dilatation $e$ erhält man durch Addieren der ersten drei Gl. (19):

$$e = \sigma_x\,(s_{11} + s_{12} + s_{13}) + \sigma_y\,(s_{21} + s_{22} + s_{23}) + \ldots \tau_z\,(s_{61} + s_{62} + s_{63})$$

und danach $p$ durch Addition der Ausdrücke für $\varepsilon_x'$, $\varepsilon_y'$, $\varepsilon_z'$

$$p = \frac{e}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2\,(s_{12} + s_{23} + s_{31})}.$$

Das skalare Produkt $\mathfrak{P}' \mathfrak{D}'$ ist nach (15) gleich

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{D}' = p\,(\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z') = p\,e = \frac{e^2}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2\,(s_{12} + s_{23} + s_{31})}.$$

Zieht man die Hälfte dieses Produktes von $A$ ab, so erhält man die gesuchte Gestaltänderungsarbeit

$$A_G = A - \frac{1}{2}\, \frac{[\sigma_x\,(s_{11} + s_{12} + s_{13}) + \ldots \tau_z\,(s_{61} + s_{62} + s_{63})]^2}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2\,(s_{12} + s_{23} + s_{31})} \quad \ldots \quad (20).$$

Selbstverständlich erscheinen sowohl $\frac{1}{2}\, \mathfrak{P}' \mathfrak{D}'$ wie $A_G$ als quadratische Formen in den $\sigma_x \ldots \tau_z$. Bezeichnet man ihre Koeffizienten mit $s_{\iota\varkappa}'$ bzw. $s_{\iota\varkappa}''$, so lehrt (20), daß

$$s_{\iota\varkappa}' = \frac{\sum\limits_{\lambda,\mu}^{1\ldots3} s_{\iota\lambda}\, s_{\varkappa\mu}}{\sum\limits_{\lambda,\mu}^{1\ldots3} s_{\lambda\mu}} \qquad \text{und} \qquad s_{\iota\varkappa}'' = s_{\iota\varkappa} - s_{\iota\varkappa}' \quad \ldots \ldots \quad (20')$$

---

[1]) Diese Zerlegungsvorschrift hat unabhängig von mir Hr. A. Reuß in Budapest gefunden und mir in einem Brief im Dezember 1927 mitgeteilt. Weitere Ausführungen von Hrn. Reuß sollen später hier veröffentlicht werden.

Hieraus ergibt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft von $A_G$. Addiert man nämlich drei Koeffizienten $s_{\iota 1}' + s_{\iota 2}' + s_{\iota 3}'$, so hat man rechts im Zähler die dreifache Summe

$$\sum_{\varkappa, \lambda, \mu}^{1\ldots 3} s_{\iota\lambda}\, s_{\varkappa\mu} = \sum_{\lambda}^{1\ldots 3} s_{\iota\lambda} \cdot \sum_{\varkappa, \mu}^{1\ldots 3} s_{\varkappa\mu}$$

zu bilden. Hier ist aber der zweite Faktor gleich dem Nenner, woraus folgt

$$s_{\iota 1}' + s_{\iota 2}' + s_{\iota 3}' = s_{\iota 1} + s_{\iota 2} + s_{\iota 3}\,, \qquad \text{daher} \quad s_{\iota 1}'' + s_{\iota 2}'' + s_{\iota 3}'' = 0$$

für $\iota = 1, 2 \ldots 6$. Diese Gleichungen für die $s_{\iota\varkappa}''$ stimmen aber genau überein mit den zu Beginn von Abschn **1** für die Koeffizienten $k_{\iota\varkappa}$ von $F$ gefundenen Bedingungen und daraus folgt: Die Gestaltänderungsarbeit $A_G$ ist eine quadratische Form der Spannungskomponenten, die der im Abschn. **1** aufgestellten Forderung 1 genügt. Ihr allgemeiner Ausdruck, der 15 willkürliche Konstante enthält, ist genau analog (3):

$$\left.\begin{aligned} A_G = &- {}^1/_2 \left[s_{12}''(\sigma_x - \sigma_y)^2 + s_{23}''(\sigma_y - \sigma_z)^2 + s_{31}''(\sigma_z - \sigma_x)^2\right] \\ &- \tau_x \left[s_{24}''(\sigma_x - \sigma_y) + s_{34}''(\sigma_x - \sigma_z)\right] - \ldots - \ldots \\ &+ s_{45}''\tau_z\tau_y + \ldots + \ldots + {}^1/_2 \left(s_{44}''\tau_x^2 + s_{55}''\tau_y^2 + s_{66}''\tau_z^2\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21),$$

wobei die $s_{\iota\varkappa}''$ durch (20') mit dem ursprünglichen Koeffizienten $s_{\iota\varkappa}$ in dem Ausdruck für $A$ verknüpft sind. Naturgemäß muß $A_G$ auch der Invarianz-Forderung 2 von Abschn. **1** genügen, so daß sich (21) je nach den Symmetrieverhältnissen in der gleichen Weise vereinfacht, wie es im vorangehenden Abschnitt für $F$ gezeigt wurde.

Läßt sich nun behaupten, daß — wie es bei isotropen Körpern zutrifft — die in **1** entwickelte, quadratische Fließbedingung $F =$ konst. mit der Aussage $A_G =$ konst. zusammenfällt? Dies ist nicht der Fall. Bei isotropen Körpern enthält der Ausdruck für $A_G$, d. i. der zweite Teil von (17), nur eine einzige Materialkonstante, die als gemeinsamer Faktor vor die variablen Glieder tritt. Daher kann sich $F$ von $A_G$ nur in diesem Faktor unterscheiden und die Bedingungen $F =$ konst. und $A_G =$ konst. besagen dasselbe. Bei Kristallen enthält der Ausdruck für $A_G$ mindestens zwei unabhängige Konstanten (beim regulären System genau zwei), deren Quotienten das Verhalten des Körpers im rein elastischen Gebiet bestimmen. Es ist nicht einzusehen, warum für den Ausdruck $F$, der sich allein auf das Fließgebiet bezieht, die gleichen Verhältniswerte maßgebend sein sollen. Die quadratische Fließbedingung $F =$ konst. ist jedenfalls insofern allgemeiner gegenüber einer »Hypothese konstanter Gestaltänderungsarbeit«, als sie nicht voraussetzt, daß die in $F$ auftretenden Materialzahlen $\varkappa, \lambda \ldots$ die für den elastischen Bereich festgestellten Werte besitzen.

Die bisherigen Versuche an Kristallen haben gezeigt, daß selbst dort, wo man mit einer quadratischen Invariante als Fließbedingung auskommt, die Zahlenverhältnisse der Konstanten auch nicht der Größenordnung nach denjenigen entsprechen, mit denen man es in dem Ausdruck für die elastische Arbeit zu tun hat. Dazu kommt, daß aller Wahrscheinlichkeit nach wenigstens für manche kristallinische Körper Fließfunktionen von ganz anderm Bau Geltung haben. Daraus darf man wohl den Schluß ziehen, daß die Deutung meiner Fließbedingung für isotrope Körper als Hypothese von der »Konstanz der Gestaltänderungsenergie«, jedenfalls aber das Uebertragen dieser Auffassung auf Kristalle, sachlich nicht begründet ist.

Dagegen werden wir im folgenden eine Auffassung kennen lernen, nach der in völlig anderer Weise die Fließfunktion in jedem Falle, also auch wenn sie kein quadratischer Ausdruck in den Spannungskomponenten ist, die Rolle eines »Fließpotentials« spielt, also in anschauliche Verknüpfung mit der Arbeitsgröße — allerdings nicht der elastischen, sondern der Arbeit im Fließzustand — gebracht werden kann.

**4. Die Fließbedingung für den einachsigen Spannungszustand.** Fast alle bisherigen Versuche sind an dem einfachsten Spannungszustand, bei dem zwei der drei Hauptspannungen null sind, ausgeführt worden. Es ist daher zweckmäßig, ehe wir an die Besprechung der Versuchsergebnisse herangehen, in den Formeln der vorangegangenen Abschnitte jene Spezialisierungen vorzunehmen, die im Falle »einachsiger« Spannung eintreten.

Besteht in einem Punkte des Körpers eine Hauptspannung von der Größe $\sigma$ in einer Richtung, die mit den Koordinatenachsen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ einschließt, während die anderen Hauptspannungen verschwinden, so haben die sechs Spannungskomponenten nach dem Schema (10) in **2** die Werte

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \cos^2\alpha\,, & \tau_x &= \sigma \cos\beta \cos\gamma \\ \sigma_y &= \sigma \cos^2\beta\,, & \tau_y &= \sigma \cos\gamma \cos\alpha \\ \sigma_z &= \sigma \cos^2\gamma\,, & \tau_z &= \sigma \cos\alpha \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Diese Ausdrücke sind in die Fließfunktion einzuführen, die damit eine Funktion von $\sigma$ und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, also von drei unabhängig Veränderlichen wird. Beim isotropen Körper fallen allerdings die Winkelgrößen heraus, da ja Richtungs-Invarianz besteht, und **jede** Fließbedingung muß hier darauf hinauslaufen, daß $\sigma =$ konst. gesetzt wird. Darum kann man Aufschluß über die Gestalt der Fließgrenze isotroper Körper niemals durch Versuche mit dem einfachsten Belastungsfall erhalten. Anders bei Kristallen, wo die Art der **Richtungsabhängigkeit** durch die Fließfunktion vorgeschrieben wird und demgemäß Gegenstand der experimentellen Ueberprüfung sein kann.

a) **Reguläres System.** Führt man die Werte aus (22) in den quadratischen Ausdruck (12) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{F}{\sigma^2} &= (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)^2 + (\cos^2\beta - \cos^2\gamma)^2 + (\cos^2\gamma - \cos^2\alpha)^2 \\ &\quad + \varkappa\,(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha)\end{aligned}\right\} \quad . \quad (23)$$

und nach einfacher Umformung, mit Rücksicht auf $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\frac{F}{\sigma^2} = 2 + (\varkappa - 6)\,(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (23').$$

Bei Annahme der Fließbedingung $F =$ konst. $= K^2$ beträgt danach die zulässige Zugspannung $\sigma$ in der durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegebenen Zugrichtung:

$$\sigma = \frac{\varkappa}{\sqrt{2 + (\varkappa - 6)\,(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha)}} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Diese Formel ist an Versuchen nachprüfbar, sobald man genügend viel verschiedene Zugrichtungen erprobt hat. Von Interesse mag es sein, die Werte von $\sigma$ für die folgenden drei kristallinisch ausgezeichneten Richtungen festzustellen: 1. Für die Richtung einer Würfelkante (1, 0, 0), mit den Richtungscosinus $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$; 2. für die Richtung einer Flächendiagonale des Würfels (1, 1, 0, sog. Dodekaeder-Richtung), mit $\cos\alpha = \cos\beta = 1 : \sqrt{2}$, $\cos\gamma = 0$; 3. für die Richtung der Würfeldiagonale (1, 1, 1, sog. Oktaeder-Richtung) mit $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1 : \sqrt{3}$. Einsetzen in (24) ergibt

$$\sigma_1 = \frac{K}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_2 = \frac{2\,K}{\sqrt{2 + \varkappa}}, \qquad \sigma_3 = \frac{\sqrt{3}\,K}{\sqrt{\varkappa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und daraus die von $K$ und $\varkappa$ freie Beziehung

$$4\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 - 3\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25'),$$

die in Abb. 5 dargestellt erscheint.

Viel schwieriger zu verfolgen sind die beiden Formen der im Abschnitt **2** erwähnten Schubspannungshypothesen. Nennt man $\varphi$ und $\psi$ die Winkel, die die Zugrichtung mit einem ausgezeichneten Achsenpaar bildet, so muß man den Größtwert von $\sigma\cos\varphi\cos\psi$ gleich einer Konstanten $k$ setzen. Sind zunächst die zwölf S. 167 angeführten Achsenpaare ausgezeichnet, so gestaltet sich die Rechnung wie folgt. Man kann die Betrachtung auf denjenigen Teil des ersten Oktanten ($\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$) beschränken, der durch die Ungleichheiten

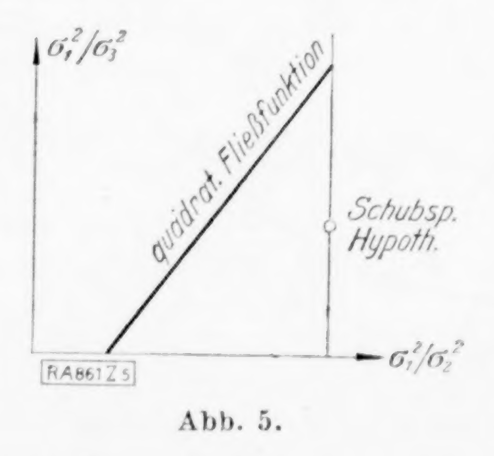


Abb. 5.

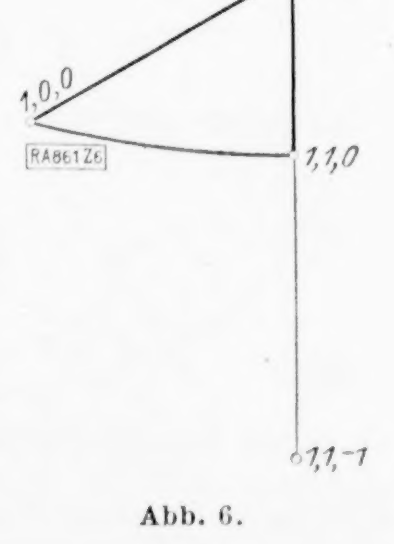


Abb. 6.

$$\cos\alpha > \cos\beta > \cos\gamma > 0$$

gekennzeichnet wird, da man durch kristallographisch zulässige Vertauschungen der Achsen jede beliebige Richtung in diesen Raumteil transformieren kann. Stellt man eine Richtung durch ihren Durchstoßpunkt mit der Einheitskugel und diese dann durch ihre stereographische Projektion dar, so erscheint der herausgegriffene Raumteil als ein sphärisches Dreieck, begrenzt durch drei Kreisbögen (Bilder von Großkreisen der Kugel), die die oben hervorgehobenen drei Richtungen (Würfel-Dodekaeder- und Oktaeder-Richtungen) und zwar in unserm Fall die Richtungen 1, 0, 0; 1, 1, 0; 1, 1, 1, zu Eckpunkten haben (Abb. 6).

Das erste Paar der S. 167 aufgeführten Richtungen hat die Richtungscosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Das Produkt $\cos\varphi \cos\psi$ hat daher den Wert

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)(\cos\beta - \cos\gamma).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit den elf anderen, analog gebildeten, die sich nur in den Vorzeichen der einzelnen Summanden usf. unterscheiden, so findet man leicht durch Herstellen der Differenzen, daß zufolge der Ungleichheiten, die zwischen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ vorausgesetzt wurden, der fünfte Ausdruck den größten Wert haben muß, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma)(\cos\alpha + \cos\gamma).$$

Sein Ueberschuß über den ersten beträgt z. B., nach Weglassung des Faktors $1:\sqrt{6}$,

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos\gamma\,(\cos\alpha + \cos\beta) > 0\,.$$

Es kommt mithin für den ganzen hervorgehobenen Bereich nur das eine Achsenpaar $1, 1, -1;\ 1, 0, 1$ in Betracht und die Fließbedingung für eine dem Bereich angehörige Richtung $\alpha, \beta, \gamma$ lautet

$$\sigma = \frac{k\sqrt{6}}{(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma)(\cos\alpha + \cos\gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Aus der Kenntnis dieser einen Formel kann man für alle anderen Richtungen, durch entsprechende Vertauschungen der Achsen, die maßgebende ableiten. In Abb. 7 ist in stereographischer Darstellung die Einteilung der Kugeloberfläche in die zwölf Gebiete gegeben, für die je eines der zwölf Achsenpaare das maßgebende ist. Die Nummern beziehen sich auf die Reihenfolge der Aufzählung S. 167. Diese Diskussion der ersten Schubspannungshypothese für reguläre Kristalle ist wesentlich in der gleichen Form von G. J. Taylor und C. F. Elam gegeben worden[1]).

Etwas anders gestaltet sich das Ergebnis, wenn man die zweite der in Abschn. **2** erwähnten Hypothesen zugrundelegt, wonach die ausgezeichneten Achsenpaare aus je einer der vier Oktaederlinien und einer beliebigen dazu senkrechten Richtung bestehen.

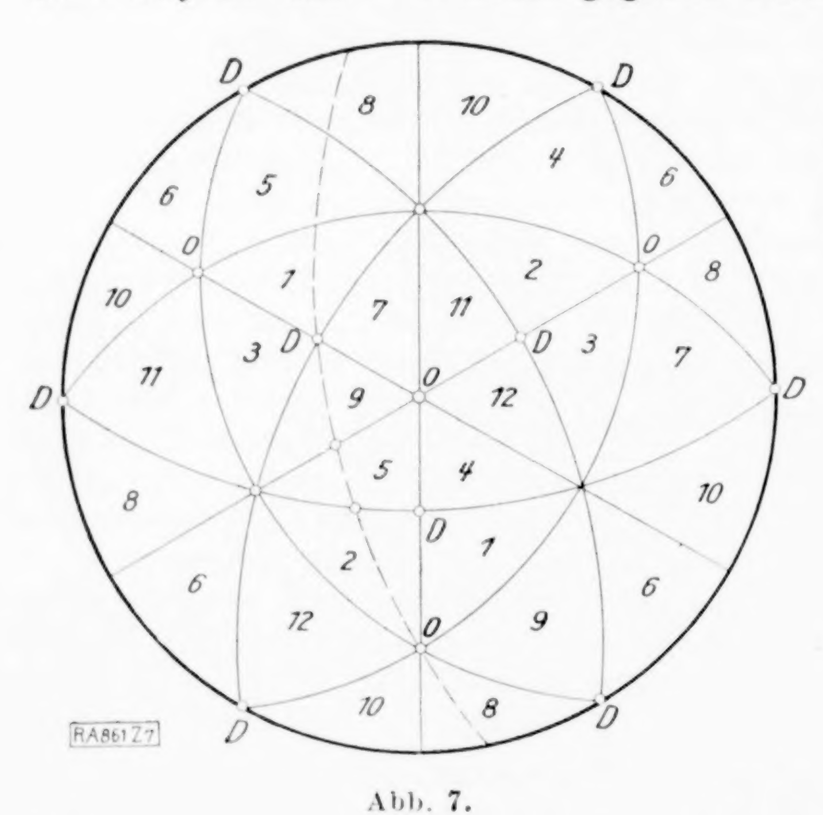


Abb. 7.

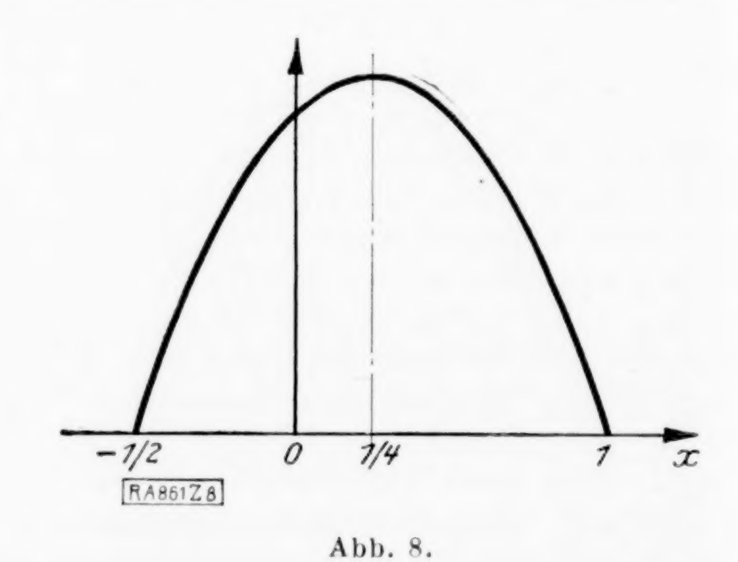


Abb. 8.

Hält man die erste Achse, also den Winkel $\varphi$ fest, so wird $\cos\varphi \cdot \cos\psi$ ein Maximum, wenn $\psi$ möglichst klein wird; der kleinste Winkel zwischen einer Richtung $\alpha, \beta, \gamma$ und einer in der Ebene senkrecht zur Richtung $\varphi$ liegenden ist aber offenbar der Winkel zwischen $\alpha, \beta, \gamma$ und der Ebene selbst, also $90 - \varphi$. Man hat demgemäß $\sigma\cos\varphi\sin\varphi$ zu betrachten und unter den vier Werten dieses Ausdrucks für die vier Oktaederrichtungen jeweils den größten zu suchen. Nimmt man zunächst die 1, 1, 1-Achse an, so hat man

$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi = {}^1/_3\,(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2\,[1 - {}^1/_3\,(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2] = {}^2/_9\,(1 + 2x)(1 - x)$$

$$\text{mit } x = \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (27\,\text{a}).$$

[1]) Proceed. Roy. Soc. London, A 112 (1926), S. 337.

Je näher $x$ bei $^1/_4$ liegt, um so größer wird $\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ (s. Abb. 8). Für die drei anderen Raumdiagonalen muß man nur die Vorzeichen in der Formel für $x$ entsprechend abändern, z. B. für die Richtung 1, 1, —1

$$x = \cos\alpha\cos\beta - \cos\beta\cos\gamma - \cos\gamma\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\text{b})$$

setzen. Beschränkt man sich, wie früher, auf den Winkelbereich, in dem $\cos\alpha > \cos\beta > \cos\gamma > 0$, so sieht man, daß hier die erste oder die zweite der genannten Achsen die maßgebende ist, d. h. den größeren Wert von $\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ liefert, je nachdem $\cos\alpha\cos\beta$ kleiner oder größer als $^1/_4$ ist. Von dem Dreieck, dessen Ecken durch die Richtungen 1, 0, 0; 1, 1, 0 und 1, 1, 1 bestimmt werden, wird durch die Linie $4\cos\alpha\cos\beta = 1$ eine Ecke abgeschnitten, für die die Diagonale 1, 1, 1 das Maximum der Schubspannung liefert, während für den Restteil die Diagonale 1, 1, —1 in Betracht kommt. Durch Vertauschung der Bezeichnungen für die drei Koordinatenachsen schließt man auf die übrigen analogen Bereiche und gelangt so zu der in Abb. 9 dargestellten Einteilung der Halbkugel. Hier bedeuten die Nummern 1 und 2 die beiden genannten Diagonalen, 3 und 4 die Richtungen 1, —1, 1 bzw. 1, —1, —1.

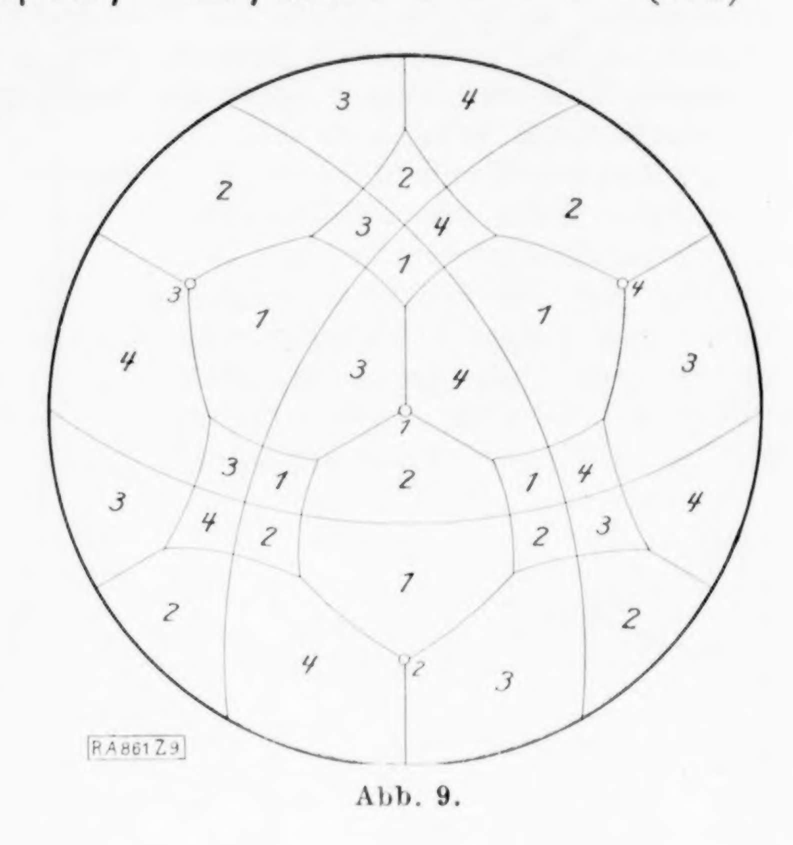


Abb. 9.

Die Formel für die (gegen Eintritt des Fließens) zulässige Zugspannung lautet hier

$$\sigma = \frac{3k}{\sqrt{2(1+2x)(1-x)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

wenn für $x$ der eine der beiden Ausdrücke (27a) oder (27b) gesetzt wird.

b) Hexagonales System. Die Erörterung ist hier bald erledigt, wenn man sich einerseits auf die quadratische Fließbedingung, andrerseits auf den in Abschn. **2** erwähnten Fall der Schubspannungshypothese beschränkt. Einsetzen von (22) in (14) und einfache Umformung auf Grund der Beziehung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ liefert

$$\begin{aligned} F &= \sigma^2\left[(\cos^2\alpha - \cos^2\gamma)^2 + (\cos^2\beta - \cos^2\gamma)^2 + \lambda(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)^2\right.\\ &\quad \left.+ \varkappa\cos^2\gamma(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + (4\lambda + 2)\cos^2\alpha\cos^2\beta\right]\\ &= \sigma^2\left[(1+\lambda)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)^2 + (\varkappa - 2)\cos^2\gamma(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + 2\cos^4\gamma\right]\\ &= \sigma^2\left[1 + \lambda + (\varkappa - 2\lambda - 4)\cos^2\gamma - (\varkappa - \lambda - 5)\cos^4\gamma\right]. \end{aligned}$$

Die zulässige Zugspannung ist hiernach nur von $\gamma$ abhängig, d. h. für alle Richtungen, die symmetrisch zur Prismenachse liegen, gleich. Man erhält für $F = K^2$:

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{1 + \lambda + (\varkappa - 2\lambda - 4)\cos^2\gamma - (\varkappa - \lambda - 5)\cos^4\gamma}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

und daraus für $\gamma = 90^0$ bzw. $\gamma = 0$

$$\sigma_1 = \frac{K}{\sqrt{1+\lambda}}, \qquad \sigma_2 = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28').$$

Die Schubspannungshypothese mit Auszeichnung der Prismenachse und einer dazu beliebigen Senkrechten stimmt, wie schon am Schlusse von **2** erwähnt, mit der Annahme überein, daß nur die $\varkappa$-Glieder in dem Ausdruck für $F$ beibehalten werden. Sie führt daher zu dem Ausdruck

$$\sigma = \frac{k}{\cos\gamma\sqrt{1-\cos^2\gamma}} = \frac{k}{\sin\gamma\cos\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

der ja auch, nach dem früher Gesagten, unmittelbar hätte angeschrieben werden können.

**5. Vergleich mit den Beobachtungen.** So mannigfaltig auch die Versuche sind, die über die plastische Formänderung von Kristallen in neuerer Zeit angestellt wurden, so selten finden sich Versuchsreihen, die zahlenmäßig den Eintritt des Fließzustandes in Abhängigkeit von der Kristallorientierung erkennen lassen. Die Haupt-

schwierigkeit liegt natürlich darin, daß die Fließgrenze nicht exakt bestimmt werden kann und ihre Definition nur auf der starken Idealisierung eines wirklichen Vorganges, wie sie in Abb. 10 angedeutet wird, beruht. In der Regel verdeckt der »Verfestigungsvorgang« das Eintreten des Fließzustandes oder es zeigen sich schon bei geringen Spannungen so große bleibende Formänderungen, daß von einer Trennung zwischen elastischem und plastischem Bereich nicht gesprochen werden kann. Andrerseits sind die notwendigen Feststellungen über die Richtung der Kristallachsen recht schwierig, daher oft unzureichend oder unsicher.

P. Rosband und E. Schmid[1]) haben eine Reihe von 36 Beobachtungen an Zn-Einkristallen zur Ermittlung der Streckgrenze ausgeführt. Sie geben in g/mm² die Zugspannung an, bei der eine bleibende Dehnung von ungefähr 0,3 vH der ursprünglichen

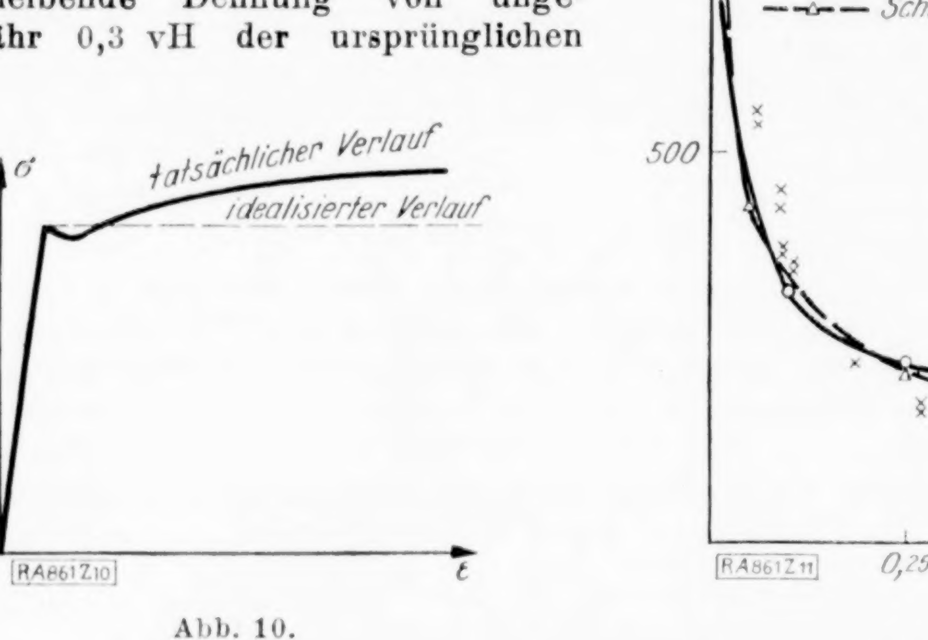



Abb. 10.

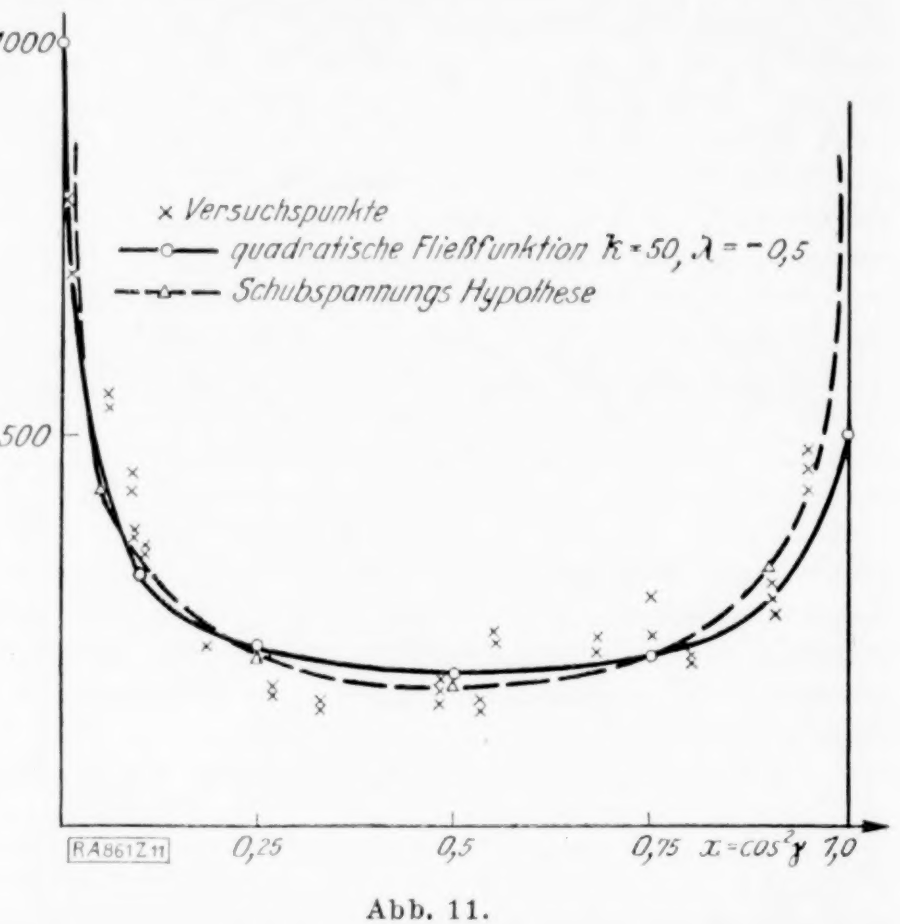



Abb. 11.

Länge eingetreten ist, sowie den Winkel zwischen Zugrichtung einerseits »Gleitebene« und »Gleitrichtung« andrerseits. Die Gleitebene fällt nach den Beobachtungen durchwegs mit der Basisebene des Kristallprismas zusammen, so daß der erste der genannten Winkel in unserer Bezeichnung $90 - \gamma$ ist. Nach der oben erörterten Schubspannungshypothese, Gl. (29), die nur eine Spezialisierung des allgemeineren Ansatzes (28) ist, und nach diesem selbst, soll $\sigma$ nur von $\gamma$ allein abhängen. In Abb. 11 sind die Ergebnisse von Rosband und Schmid — unter Weglassung eines einzigen, von ihnen selbst als unsicher bezeichneten Wertes — dargestellt. Als Abszisse ist $\cos^2\gamma$ aufgetragen, als Ordinate die Streckgrenze $\sigma$. Die gestrichelt eingezeichnete Kurve entspricht Gl. (29), also der Schubspannungshypothese, die ausgezogene der Gl. (28) mit $\varkappa = 50$, $\lambda = -0{,}5$. Man sieht, daß die Versuche nicht ausreichen, um zwischen diesen beiden Annahmen zu entscheiden (wobei die erste sich einfach durch $\varkappa = \infty$ kennzeichnen läßt) und auch nicht eine irgendwie genauere Bestimmung der Konstanten $\varkappa$, $\lambda$ ermöglichen. Eine Bestimmung von $\lambda$ ließe sich nach (28') leicht erreichen, wenn man das Verhältnis der Streckgrenzenwerte für die beiden Extremlagen $\gamma = 90^0$ und $\gamma = 0^0$ experimentell festgestellt hätte. Grundsätzlich ist zu sagen, daß die Schubspannungshypothese, so wie sie sich in (29) darstellt, zu unendlich großem $\sigma$ für $\gamma = 90^0$ und $\gamma = 0^0$ führt, also hier unbrauchbar wird. Es wäre aber möglich, sie in dem Sinne zu ergänzen, daß außer den in (29) zugelassenen noch weitere ausgezeichnete Richtungen eingeführt werden, die dann zur Geltung kommen, wenn für die ersten $\sigma$ zu groß wird. In diesem Falle würde die gestrichelte Kurve in der Nähe der äußeren Ränder abbrechen und gegebenenfalls sich unter mehr oder weniger ausgeprägten Knicken dem Verlauf annähern, wie er — stetig — von einer Kurve nach Gl. (28) dargestellt wird.

Man könnte noch fragen, ob die häufig an den gleichen Abszissen auftretenden Doppelwerte etwa ihre Erklärung darin finden, daß außer $\gamma$ noch ein zweiter Winkel für die Größe der Fließspannung maßgebend ist. Für den von den Beobachtern gemessenen

[1]) Zeitschr. f. Phys. Bd. 32 (1925), S. 197 bis 225.

Winkel zwischen Zug- und Gleitrichtung trifft dies jedenfalls nicht zu. Dieser Winkel ist fast stets kaum von $90 - \gamma$ verschieden (was soviel bedeutet wie Gleitrichtung = Projektion der Zugrichtung in die Gleitebene), und er wird von den Beobachtern für jedes $\gamma$ nur einmal angegeben, z. B. für $\gamma = 30^0$, $\cos^2\gamma = 0{,}75$ zu allen drei Versuchswerten $\sigma = 220$, $244$, $296$ jedesmal gleich $63^0$.

Eine zweite Versuchsreihe, die M. Georgieff und E. Schmid veröffentlichen[1]), betrifft Wismutkristalle. Dieses Metall kristallisiert zwar rhomboedrisch, aber die Abweichungen vom kubischen System sind so gering, daß darüber hinweggesehen werden kann. In Uebereinstimmung mit den genannten Autoren behandeln wir daher Wismut als zum kubischen System gehörig. Abb. 12 zeigt die 30 Versuchsergebnisse in ähnlicher Weise wie Abb. 11 für Zink. Doch muß über die Auftragung der Abszissen des Kurvenbildes noch folgendes gesagt werden.

Abb. 12.

Die Autoren geben nur einen Winkel, nämlich den zwischen der Zugrichtung und der »Gleitfläche« an. Nach ihren Beobachtungen lag die Gleitfläche dauernd senkrecht zu einer Würfeldiagonale (1, 1, 1-Richtung) und die »Gleitrichtung« fiel dauernd mit der Projektion der Zugrichtung auf die Gleitebene annähernd zusammen. Da als Gleitrichtung (vergl. **6**) stets die Richtung einer Flächendiagonale (1, 0, 1-Richtung) angesehen wird, muß angenommen werden, daß die Zugrichtung stets in einer durch Raum- und Flächendiagonale bestimmten Ebene lag, also etwa auf der in Abb. 7 durch einen gestrichelten Kreisbogen angedeuteten Ebene verlief. Bildet eine Gerade dieser Ebene den Winkel $\delta$ mit der Flächendiagonale 1, 0, 1, so gilt für ihren Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ mit den drei Koordinatenachsen

$$\cos\alpha = \frac{\sin\delta}{\sqrt{3}} + \frac{\cos\delta}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\beta = \frac{\sin\delta}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\gamma = -\frac{\sin\delta}{\sqrt{3}} + \frac{\cos\delta}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad (30).$$

In Abb. 12 ist $\cos^2\delta$ als Abszisse aufgetragen.

Um die Versuchsergebnisse mit den Formeln für die Fließgrenze zu vergleichen, hat man (30) in (24) bzw. in (26) einzusetzen. Das erstere ergibt nach einfacher Umformung:

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2 + \varkappa'(4 - 8\cos^2\delta + 7\cos^4\delta)}} \quad \text{mit } \varkappa' = \frac{\varkappa - 6}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Die zugehörige Kurve für $K = 500$, $\varkappa = 0{,}6$, $\varkappa' = -0{,}45$ ist in Abb. 12 zu sehen. Sie liefert bei der Abszisse 0 (Raumdiagonale) den Wert $\sigma = 1120$, bei der Abszisse 1 (Flächendiagonale) den Wert $\sigma = 620$. Eine genauere Anpassung durch Wahl von weniger runden Zahlen für die Konstanten wäre wohl möglich, aber der Genauigkeit des Versuchsergebnisses wenig angemessen.

Stellt man sich auf den Standpunkt der ersten der in Abschn. **4** besprochenen Schubspannungshypothesen, so muß man gemäß Abb. 7 beachten, daß bei der Durchlaufung der Zugrichtungen $\delta = 0$ bis $\delta = 90^0$ das maßgebende Richtungspaar sich zweimal ändert. Einmal, wenn $\beta = \gamma$, also nach (30) $\operatorname{tg}\delta = \sqrt{3/8}$, $\delta = 31\,^3/_4{}^0$, das andere Mal, wenn $\cos\gamma = 0$, also $\operatorname{tg}\delta = \sqrt{3/2}$, $\delta = 50\,^3/_4{}^0$ wird. Für die drei in Abb. 12 gekennzeichneten Gebiete,

[1]) Zeitschr. f. Phys. Bd. 36 (1926), S. 759 bis 774.

deren Grenzen bei den Abszissen 0,4 und 0,73 liegen, sind die maßgebenden Gleitsysteme der Reihe nach

1, 1, 1 und 1, 0, −1, 1, 1, −1 und 1, 0, 1, 1, −1, 1 und 1, 1, 0.

Für den Bereich II hat man unmittelbar (26) zu verwenden und erhält hier nach Einsetzen von (30):

$$\sigma = \frac{k}{\sin\delta \cdot \cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32\,a),$$

was mit $k = 220$ in Abb. 12 gestrichelt eingetragen wurde. Für die Bereiche I und III muß man die Vorzeichen im Nenner von (26) entsprechend verändern und dann erst (30) einführen. Man erhält so:

$$\sigma = \frac{3\sqrt{3}\,k}{\sin\delta\,(\sqrt{2}\sin\delta + 2\sqrt{3}\cos\delta)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{6\sqrt{6}\,k}{(2\sqrt{3}\cos\delta - \sqrt{2}\sin\delta)(\sqrt{3}\cos\delta + 2\sqrt{2}\sin\delta)} \quad (32\,b,\,c).$$

Auch diese Linien sind in Abb. 12 gestrichelt zu sehen; sie schließen mit einem deutlichen Knick an die erstgenannte Linie an und geben die Endwerte $\sigma = 810$ für $\delta = 90^0$ und $\sigma = 540$ für $\delta = 0$.

Man erkennt, daß eine Entscheidung für oder gegen die eine oder die andere Hypothese nach den Ergebnissen dieser Versuchsreihe nicht möglich ist. Gegen die Schubspannungs-Hypothese könnte geltend gemacht werden, daß die Beobachter von dem Knick bei $\delta = 31\,^3/_4\,^0$, auch hinsichtlich der Gleitrichtungen, nichts bemerkt haben.

Wir unterlassen hier das Eingehen auf andere Versuchsreihen, da es auch zu keinem entscheidenden Ergebnis führen würde. Weitere Aufschlüsse über das tatsächliche Verhalten der plastischen Körper werden wir im Zusammenhang mit kinematischen Betrachtungen aus der von uns schon angekündigten Haupthypothese über das Fließpotential gewinnen.

**6. Kinematik.** Schon die ältesten, von Geologen angestellten Beobachtungen über die plastischen Formänderungen von Kristallen führten zu der Behauptung, die charakteristische Bewegungsform sei ein »Gleiten« ebener Schichten aufeinander. Man versteht darunter wohl einen Vorgang, wie ihn Abb. 13 andeutet, wobei die drei Geschwindigkeitskomponenten durch

$$v_x = \alpha \cdot y\,, \qquad v_y = 0\,, \qquad v_z = 0$$

gegeben sind. Bezeichnen wir die Dehnungs- und Schiebungsgeschwindigkeiten mit $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ bzw. $^1/_2\,\gamma_x, {}^1/_2\,\gamma_y, {}^1/_2\,\gamma_z$, also

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \gamma_x = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \gamma_y = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \gamma_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

so werden für die betrachtete Bewegung sämtliche dieser Größen mit Ausnahme von $\gamma_z$, das den Wert $\alpha$ enthält, null. Die Matrix des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit sieht daher so aus:

$$\begin{Bmatrix} 0 & ^1/_2\,\alpha & 0 \\ ^1/_2\,\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (33).$$

y
x
RA861 Z 13

Abb. 13.

Auf diese Gestalt läßt sich durch Drehung des Koordinatenkreuzes jede symmetrische Matrix bringen, die 1. die Spur 0 hat, d. h. mit $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ einer divergenzfreien, volumbeständigen Deformation entspricht und 2. die Determinante 0 besitzt, also eine zweidimensionale, ebene Deformation darstellt. Denn auf Hauptachsen bezogen lautet die Matrix der ebenen volumbeständigen Formänderung

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33'),$$

und dies geht nach (10) in (33) über, wenn man das Achsenkreuz durch $45^0$ um die $z$-Achse dreht und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha$ setzt. Da wir die Volumbeständigkeit der plastischen Deformation ein für allemal voraussetzen (vergl. Abschn. **1**), so können wir sagen: Die

Behauptung, daß der Formänderungsvorgang in reinem »Gleiten« bestehe, ist gleichbedeutend damit, daß er eine ebene Deformation darstellt.

Die Größen $\varepsilon$, $\gamma$, die wir hier eingeführt haben, bedeuten, genau genommen, Geschwindigkeiten. Denken wir sie mit einer kleinen Zeitgröße $\Delta t$ multipliziert, so erhalten wir die Dehnungen und Winkeländerungen, die sich innerhalb des Zeitraums $\Delta t$ aus dem Ruhezustand heraus entwickeln. Es wird im folgenden, soweit nicht ausdrücklich anderes gesagt wird, stets vorausgesetzt, daß die $\varepsilon$ und $\gamma$ in diesem Sinn als Größen, die den wirklich beobachtbaren Formänderungen proportional sind, aufgefaßt werden können. Dabei haben natürlich nur solche Aussagen eine physikalische Bedeutung, die sich lediglich auf die Verhältnisse der sechs $\varepsilon$, $\gamma$ untereinander beziehen.

Sieht man von einem, wie wir eben gesehen haben, bedeutungslosen Faktor ab, so ist eine Gleitbewegung oder eine divergenzfreie, ebene Deformation durch zwei zueinander senkrechte Richtungen gegeben, die für die Deformation durchaus die gleiche Rolle spielen [die $x$- und $y$-Richtung in (33)]. Nur durch Bezugnahme auf die äußere Begrenzung des Körpers oder andere Umstände, die über die Betrachtung des augenblicklichen Deformationsvorganges hinausreichen, kann man eine dieser Richtungen als die »Gleitrichtung« ($x$-Richtung in Abb. 13), die andere als die »Normale zur Gleitebene« ($y$-Richtung in Abb. 13) unterscheiden. Für unsere Aufgabe, die Aufstellung der Grundlagen der Mechanik plastischer Körper, kommt die Unterscheidung nicht in Frage.

Die meisten Beobachter stimmen darin überein, daß als Gleitrichtung und Normale zur Gleitebene nur bestimmte ausgezeichnete Richtungspaare im Kristall auftreten können. Nach allgemeiner Ansicht sind es in jedem Falle die gleichen Rechtwinkelpaare, die vom Standpunkt der Schubspannungs-Hypothesen die Fließgrenze bestimmen. Diese Bemerkung ist es vorzugsweise, die uns zu der im folgenden Abschnitt darzulegenden allgemeinen Theorie des Fließpotentials führt. Beim regulären System werden in erster Linie die in Abschn. 2 angeführten Paare, bestehend aus einer Würfel- und einer Flächendiagonale als für die Gleitung ausgezeichnete Richtungen gefunden, bei Eisen (von Taylor und Elam) auch die ebenfalls schon genannten Paare aus Würfeldiagonale und beliebiger Normale, beim hexagonalen System die Paare, die aus der Prismenachse und einer beliebigen Basisgeraden sich zusammensetzen.

Daß die plastischen Formänderungen der Kristalle ausschließlich ebene seien, trifft sicher nicht zu. Die sorgfältigen Versuche von Taylor und Elam, vor allem an Aluminiumkristallen, haben gezeigt, daß für Zugrichtungen, die an der Grenze zweier Gebiete der in Abb. 7 oder 9 angedeuteten Art liegen, die sog. »doppelte Gleitung« eintritt, d. i. eine Deformation, die als Uebereinanderlagerung zweier ebener Deformationen mit den betreffenden Richtungspaaren als Achsen aufgefaßt werden kann. Man muß dann annehmen, daß, wenn es gelänge, die Zugrichtung mit einer Würfeldiagonale zusammenfallen zu lassen (etwa mit dem Mittelpunkt in Abb. 7), ein noch allgemeinerer Deformationsvorgang eintreten würde. Grundsätzlich läßt sich aus fünf ebenen Deformationen, deren Achsenpaare keine zu spezielle Lage zueinander haben, jede Deformation zusammensetzen. Wir wollen sehen, daß fünf von den sechs Achsenpaaren, die für den Mittelpunkt von Abb. 7 gleichberechtigt sind, ausreichen, um durch Superposition zugehöriger ebener Deformationen eine beliebige (divergenzfreie) Deformation zu liefern. Die Rechnung gestaltet sich wie folgt.

In dem Koordinatensystem, dessen $x$-Achse die Richtung 1, 1, —1 (Richtungscosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$), dessen $y$-Achse die Richtung 1, 0, 1 (Richtungscosinus $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$) hat, besitzt die Gleitung, die zu diesem Achsenpaar gehört, die Matrix (33), d. h. es sind alle Deformationsgrößen außer $\gamma_z$ gleich null und $\gamma_z = \alpha$. Nach dem Schema (10) rechnen sich daher die sechs Deformationskomponenten für die Richtungen der Würfelkanten [aus den Größen der letzten Spalte in (10)] zu

$$\varepsilon_x = \frac{\alpha}{\sqrt{6}}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\alpha}{\sqrt{6}}; \qquad \frac{1}{2}\gamma_x = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{2}\gamma_y = 0, \quad \frac{1}{2}\gamma_z = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{6}}.$$

In ganz der gleichen Weise erhält man, wenn man von dem Achsenpaar 1, 1 —1; 0, 1, 1 ausgeht, die Größen

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\alpha}{\sqrt{6}}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\alpha}{\sqrt{6}}; \qquad \frac{1}{2}\gamma_x = 0, \quad \frac{1}{2}\gamma_y = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{2}\gamma_z = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{6}}$$

Hieraus folgt, daß die $y$-Richtung mit einer Hauptachse der Deformationsgeschwindigkeit zusammenfällt. Der Winkel $\vartheta$ zwischen einer zweiten Hauptachse und der $x$-Richtung ist gegeben durch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\gamma_y}\left[\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_z)^2+\gamma_y^2}-(\varepsilon_x-\varepsilon_z)\right] \sim 1-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_z}{\gamma_y} \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Der Näherungsausdruck ergibt sich unter der Annahme, daß $\varkappa$ groß gegen $\lambda$ und gegen 1, also $\gamma_y$ groß gegen $\varepsilon_x$ und $\varepsilon_z$ ist, und gilt natürlich nur für Winkel $\gamma$, die nicht nahe $0^0$ oder $90^0$ sind (da hier $\gamma_y$ null wird). Die Voraussetzung trifft zu, wenn wir die aus Abschn. **5** bekannten Werte $\lambda = -{}^1/_2$, $\varkappa = 50$ einsetzen. In diesem Falle wird

$$\varepsilon_x - \varepsilon_z = 3\,\sigma\,({}^1/_2 \sin^2\gamma - \cos^2\gamma) = -{}^3/_4\,\sigma\,(1+3\cos 2\gamma)$$

und

$$\operatorname{tg}\vartheta - 1 \sim \frac{3\,(1+3\cos 2\gamma)}{2\,\varkappa \sin 2\gamma} = 0{,}030\,\frac{1+3\cos 2\gamma}{\sin 2\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40').$$

Der Verlauf von $\vartheta - 45^0$ als Funktion von $\cos^2\gamma$ ist in Abb. 14 eingetragen; die bezeichneten Werte für $\cos^2\gamma = 0{,}05,\ 0{,}10$ usf. sind nach der genauen Gl. (40) berechnet.

Abb. 14.

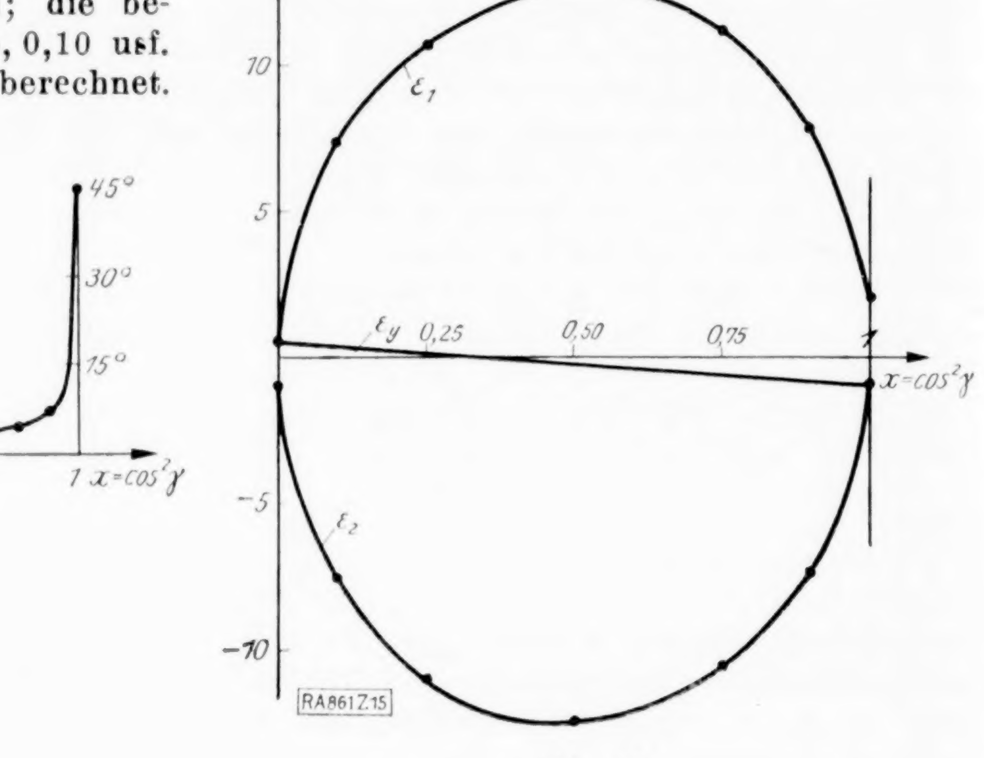



Abb. 15.

Man sieht, daß der Winkel $\vartheta - 45^0$ im ganzen Versuchsbereich von Abb. 11 verschwindend klein ist, daß also die Hauptachsen fast genau unter $45^0$ gegen die Basisebene des Prismas stehen. Die zugehörigen Hauptwerte

$$\frac{1}{2}\left[-\varepsilon_y \pm \sqrt{\gamma_y^2+\varepsilon_y^2-4\,\varepsilon_x\,\varepsilon_z}\right] \sim \frac{1}{2}(\pm\gamma_y - \varepsilon_y) = \frac{\sigma}{4}\left[\varkappa \sin^2\gamma + (1-\lambda)\cos^2\gamma + 1 + \lambda\right]$$

$$= \frac{\sigma}{8}\left[\pm 100 \sin 2\gamma + 3\cos 2\gamma + 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40'')$$

sind in Abb. 15 zugleich mit dem dritten Hauptdehnungswert $\varepsilon_y$ eingetragen. Das Resultat ist in die Augen fallend dies: Die Deformation kann für Zugrichtungen, die nicht ganz nahe parallel der Basisebene oder der Prismenachse sind, mit großer Annäherung als e b e n e betrachtet werden ($\varepsilon_y$ sehr klein gegen die anderen Hauptwerte); dabei fallen die Hauptgleitrichtungen (die die wirksamen Hauptachsen unter $45^0$ schneiden) **fast genau in die Basisebene und die dazu Senkrechte**. Nach dem früher Gesagten werden damit die Beobachtungsergebnisse mit großer Genauigkeit wiedergegeben.

Wir werden auf diese Weise zu der Frage geführt, ob nicht auch für **isotrope** Körper, die als Fließfunktion den Ausdruck (4) aufweisen, die Beziehungen (36) zu Recht bestehen? In der Tat ist dies der Fall, denn durch Differentiation von (4) findet man

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = 2\,(2\,\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) = 6\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}\right) = \sigma_x', \qquad \frac{\partial F}{\partial \tau_x} = 12\,\tau_x,$$

also nach (36)

$$\varepsilon_x = 6\,\sigma_x', \quad \varepsilon_y = 6\,\sigma_y', \quad \varepsilon_z = 6\,\sigma_z'; \qquad {}^1/_2\,\gamma_x = 6\,\tau_x, \quad {}^1/_2\,\gamma_y = 6\,\tau_y, \quad {}^1/_2\,\gamma_z = 6\,\tau_z \quad (41)$$

d. h. der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit ist bis auf einen Faktor gleich dem der Zusatzspannungen. Das ist der gleiche Ansatz, den ich 1913, in Uebereinstimmung mit

M. Lévy, dessen Arbeit [1]) mir damals nicht bekannt war, entwickelt habe; ein Ansatz, der für isotrope Körper höchst plausibel erscheint, aber bis heute durch Beobachtungen noch nicht genügend sichergestellt ist.

Diese Ergebnisse legen es weiter nahe, zu überlegen, ob die Beziehungen (36) nicht auch dann bestehen, wenn $F$ erfahrungsgemäß nicht als quadratische Funktion der Spannungskomponenten angenommen werden kann. Es würde dann natürlich der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit nicht mehr linear vom Spannungstensor abhängen. Vor allem müssen wir sehen, ob der Ansatz überhaupt sinnvoll ist, d. h. bei beliebiger Wahl der Koordinatenrichtungen den gleichen Deformationstensor liefert. Wir denken uns zu diesem Zweck in $F$ mit Hilfe des Schemas (10) neue Spannungskomponenten $\sigma_{x'}, \ldots \tau_{z'}$, eingeführt und bilden

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{x'}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_{x'}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial \sigma_{x'}} + \ldots \frac{\partial F}{\partial \tau_z} \cdot \frac{\partial \tau_z}{\partial \sigma_{x'}} = \varepsilon_x \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_{x'}} + \varepsilon_y \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial \sigma_{x'}} + \ldots \gamma_z \cdot \frac{\partial \tau_z}{\partial \sigma_{x'}}.$$

Die Differentialquotienten in dem letzten Ausdruck kann man ebenfalls aus dem Schema (10) entnehmen, wenn man hier die gestrichenen mit den ungestrichenen Größen vertauscht, so daß z. B. die Elemente der letzten Zeile (nach Vertauschung von $x$ mit $x'$ usf.) die Koeffizienten von $\sigma_{x'} \ldots \tau_{z'}$ in dem Ausdruck für $\tau_z$ sind. Die Elemente der ersten Spalte liefern nach Vertauschung der gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben die sechs gesuchten Differentialquotienten. Es ist also $\partial \sigma_x / \partial \sigma_{x'} = (x x')^2 \ldots \partial \tau_z / \partial \sigma_{x'} = (x x')(y x')$. Setzt man dies oben ein und beachtet, daß sich $\varepsilon_{x'}$ durch $\varepsilon_x, \ldots {}^1/_2 \gamma_z$ nach der ersten Zeile des Schemas (10) darstellt, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{x'}} = \varepsilon_x \cdot (x x')^2 + \varepsilon_y \cdot (y x')^2 + \ldots \frac{1}{2} \gamma_z \cdot 2 (x x')(y x') = \varepsilon_{x'} \quad . \quad . \quad (42),$$

w. z. b. w. Die Bildung (36) ist in der Tensoranalysis das Analogon zu dem aus der Vektorrechnung bekannten Gradienten einer skalaren Ortsfunktion, der, wie man weiß, ein Vektor ist.

Damit ist natürlich nur die formale Zulässigkeit des Ansatzes (36) erwiesen. Daß er bei der Wahl der Fließfunktion für $F$ den Beobachtungsergebnissen entspricht, erkennen wir, sobald wir etwa für $F$ die beim Aluminium gültige Schubspannungshypothese wählen. Sei etwa $\sigma_x \ldots \tau_z$ ein Spannungszustand, für den ein eindeutig bestimmtes unter den zwölf ausgezeichneten Achsenpaaren den größten Schubspannungswert liefert. Wir wählen diese beiden Achsen zur $x$- und $y$-Achse eines Koordinatensystems. Dann lautet die Fließbedingung für eine gewisse endliche Umgebung des betrachteten Spannungszustandes einfach $\tau_z = \text{konst.}$ Wir haben also $F = \tau_z$, und nach (36) sind sämtliche Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit außer $\gamma_z$ gleich Null. Das ist die in (33) betrachtete Deformation, die wir als eine zweidimensionale oder eine Gleitung erkannt haben, und dabei fallen die Gleitachsen mit den ausgezeichneten Spannungsachsen zusammen, wie es die Beobachtungen zeigen. Die Beziehungen (36) lehren also, daß Konstanz der Schubspannung als Fließgrenze und einfache Gleitung längs derselben Achsen als Deformation einander wechselseitig bedingen.

In den Grenzgebieten, in denen der Schubspannungswert für zwei oder mehr ausgezeichnete Achsenpaare den Höchstwert annimmt, ist die Funktion $F$, wenn man die Schubspannungshypothese in der strengsten Form aufrechterhalten will, nicht differenzierbar, also (36) nicht unmittelbar anwendbar. Die Deformationsform an den Grenzen bliebe dann unbestimmt. Es scheint aber mit den Beobachtungen (der »doppelten Gleitung« von Taylor und Elam) besser übereinzustimmen, wenn man annimmt, daß die Funktion $F$, im sechsdimensionalen Raum der $\sigma_x \ldots \tau_z$ betrachtet, nicht durch ein Polyeder mit scharfen Kanten dargestellt wird, sondern Ausrundungen, stetige Uebergänge aufweist. In diesem Falle würde (36) besagen, daß die einfache Gleitung eben nur dann Geltung hat, wenn der Spannungszustand noch einigermaßen von der Grenze entfernt ist, in der unmittelbaren Nähe der Grenzgebiete aber eine Uebereinanderlagerung ebener Deformationen eintritt. Natürlich können auch hier in letzter Linie nur Versuche entscheiden.

Es mag noch von Interesse sein, zu überlegen, was bei isotropen Körpern die Mohrsche Schubspannungsbedingung für Folgerungen aus (36) ergibt. Ein ähnlicher Gedankengang wie der oben durchgeführte zeigt hier: Sobald nur eine der drei Hauptspannungsdifferenzen den kritischen Wert besitzt, muß die Deformation eine einfache Gleitung in den Richtungen der kritischen Schubspannung sein. In den Grenzgebieten,

[1]) M. Lévy, Journal de mathém. 1871, S. 369.

und ebenso die analogen Werte für die anderen in Frage kommenden Paare. Eine divergenzfreie Deformation kann durch fünf unabhängige Linearkombinationen der sechs Deformationskomponenten bestimmt werden. Wir wählen dafür die Verbindungen $\varepsilon_x - \varepsilon_z$, $\varepsilon_y - \varepsilon_z$, $\gamma_x$, $\gamma_y$, $\gamma_z$. Läßt man dann den Faktor $\alpha : \sqrt{6}$ jedesmal fort, so sind die beiden eben betrachteten Deformationen durch die Zahlengruppen 2, 1; 1, 0, 1 und 1, 2; 0, 1, 1 gekennzeichnet. Nimmt man die Zahlen, die sich für die Achsenpaare $-1$, 1, 1; 1, 1, 0, dann $-1$, 1, 1; 1, 0, 1, endlich 1, $-1$, 1; 0, 1 1 ergeben, hinzu, so erhält man die Matrix

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Da die Determinante dieser Matrix nicht verschwindet (sie hat den Wert $-24$), so sind die fünf betrachteten ebenen Deformationen linear unabhängig, d. h. es lassen sich fünf Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_5$ so bestimmen, daß eine Uebereinanderlagerung der entsprechenden Deformationen beliebig vorgegebene Werte für $\varepsilon_x - \varepsilon_z$, $\varepsilon_y - \varepsilon_z$, $\gamma_x$, $\gamma_y$, $\gamma_z$ liefert.

Das Bild, daß man sich danach von den Formänderungsmöglichkeiten des Aluminiumkristalls machen muß, ist also etwa dies: Sobald die Schubspannung für eines der zwölf ausgezeichneten Achsenpaare den übrigen elf Werten gegenüber wesentlich überwiegt, ist die Formänderung annähernd eine Gleitung längs dieses Achsenpaares; werden zwei oder mehr ausgezeichnete Schubspannungen annähernd gleich, so tritt eine allgemeinere, eventuell die allgemeinste divergenzfreie Deformation ein. Wie weit dies Bild noch zutrifft, wenn man nicht lediglich Versuche mit einachsigen Spannungszuständen in Betracht zieht, muß vorläufig dahingestellt bleiben. Den Uebergang zum isotropen Körper kann man sich in der Weise vorstellen, daß hier jedes Achsenpaar als ausgezeichnet gilt, so daß immer genügend viele konkurrierende Gleitrichtungspaare vorhanden sind und daher jede volumbeständige Deformation möglich ist.

Zur praktischen Untersuchung der Formänderungsvorgänge bedienen sich Taylor und Elam in sehr zweckmäßiger Weise des sog. dehnungslosen Kegels[1]). Drückt man die Dehnung in der durch die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegen die Achsen festgelegten Richtung durch die $\varepsilon_x \ldots \gamma_z$ aus, so erhält man nach (10) den Ausdruck

$$\varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma + \gamma_x \cos \beta \cos \gamma + \gamma_y \cos \gamma \cos \alpha + \gamma_z \cos \alpha \cos \beta.$$

Schreibt man $x$, $y$, $z$ an Stelle des Richtungscosinus und setzt den Ausdruck gleich Null, so hat man die Gleichung des dehnungslosen Kegels. Sie lautet auf die Deformationshauptachsen bezogen

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Der Kegel zerfällt dann und nur dann in zwei Ebenen, wenn die Deformation eine zweidimensionale ist, also etwa $\varepsilon_3 = 0$. Aus der Volumbeständigkeit folgt dann, wegen $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, daß die beiden Ebenen zueinander senkrecht stehen müssen. Mißt man sechs Verschiebungsgrößen, aus denen sich die dehnungsfreien Richtungen rechnen lassen, und trägt die entsprechenden Punkte in ein stereographisches Diagramm ein, so kann man daraus, daß sie auf zwei Kreisbögen von bekannter Potenz liegen, schließen, daß die Deformation eine ebene war. Wenn bei Taylor und Elam sich Kreise ergeben, die nicht die Bilder von zwei zueinander senkrechten Ebenen sind, so liegt das nur daran, daß dort endliche Verschiebungen auftreten, während unsere Ableitungen nur für unendlich kleine (eigentlich für die Geschwindigkeiten) gelten. Die genaue Verfolgung des gesamten Bewegungsablaufs mag in einem sehr spezialisierten Falle einfach sein, im allgemeinen stellt sie ein Integrationsproblem dar, dem wir hier nicht weiter nachgehen wollen.

**7. Zusammenhang zwischen Formänderung und Fließgrenze. Das Fließpotential.** Es ist hier schon erwähnt worden und auch von den isotropen Körpern her bekannt, daß der mechanische Ansatz für plastische Körper sich in zweifacher Weise von dem der Elastizitätslehre unterscheiden muß. Erstens sind nicht die Formänderungen selbst, sondern die Formänderungsgeschwindigkeiten mit den Spannungen verknüpft. Während zweitens im elastischen Fall der Spannungszustand und die Formänderung einander eindeutig bestimmen, ist der Zusammenhang bei plastischen Medien ein lockerer.

[1]) Vergl. insbes. Proceed. of the Royal Society, A 102, (1923) S. 652.

Es bleibt, wie wir wissen, der additive Zusatz eines Kugeltensors (hydrostatischen Druckes) zur Spannung frei und es werden überdies die Deformationsgeschwindigkeiten nur bis auf einen unbestimmt bleibenden Proportionalitätsfaktor durch die Spannungen bestimmt. Beide Behauptungen sind natürlich nur im Sinn einer Idealisierung von an sich hervorstechenden Zügen der wirklichen Erscheinung zu verstehen. Wir haben schon darauf hingewiesen, daß man vielleicht eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit bekommen kann, wenn man die Fließfunktion $F$ nicht einer Konstanten, sondern einer schwach mit dem Mitteldruck veränderlichen Größe gleichsetzt. Ebenso darf die Annahme, daß eine proportionale Veränderung aller Geschwindigkeiten den Spannungszustand unbeeinflußt läßt, nicht als vollkommen genau gelten. Aber es scheint, daß dieser Umstand — Unabhängigkeit der inneren Reibung von der Geschwindigkeit — den festen plastischen Körper in erster Näherung kennzeichnet, im Gegensatz zur zähen Flüssigkeit, bei der zwischen Spannung und Geschwindigkeit direkte Proportionalität besteht.

Nimmt man an, daß die Beziehung zwischen der Zusatzspannung (d. i. der Spannung abzüglich des mittleren Druckes) und der Deformationsgeschwindigkeit, abgesehen von einem unbestimmten Faktor, eine lineare ist, so folgt für den isotropen Körper, daß die beiden (divergenzfreien) Tensoren einander proportional gesetzt werden müssen[1]: Die Hauptachsenrichtungen der Spannung und der Deformationsgeschwindigkeit fallen zusammen und die Hauptachsenlängen unterscheiden sich nur um einen gemeinsamen Faktor. Dies Resultat ergibt sich allein aus den Forderungen der Invarianz gegen Drehungen des Koordinatensystems.

Wenn wir die gleichen Ueberlegungen auf Kristalle übertragen und fordern, daß die sechs Größen $\varepsilon_x, \ldots \gamma_z$ (mit $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$) solche lineare Funktionen der fünf Spannungsgrößen $\sigma_x - \sigma_z$, $\sigma_y - \sigma_z$, $\tau_x$, $\tau_y$, $\tau_z$ sind, die den Invarianzbedingungen des betreffenden Kristallsystems genügen, so gelangt man zu einem sehr klaren und einfachen Ergebnis. Die sechs linearen Funktionen müssen die Ableitungen einer quadratischen Form $F$ der Spannungskomponenten sein:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}; \qquad \gamma_x = \frac{\partial F}{\partial \tau_x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial F}{\partial \tau_y}, \quad \gamma_z = \frac{\partial F}{\partial \tau_z} \qquad (36),$$

wobei $F$ den beiden Forderungen 1 und 2 in Abschnitt **1** genügen muß. Denn aus der ersten dieser Eigenschaften von $F$ folgt sofort, daß die Summe der drei Ableitungen nach $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ verschwindet, und die zweite legt, da die $\varepsilon_x \ldots {}^1/_2\, \gamma_z$ sich nach dem gleichen Schema (8) wie die $\sigma_x \ldots \tau_z$ transformieren, die Unabhängigkeit der Beziehung (36) von der Wahl des Achsenkreuzes innerhalb des kristallinisch gleichwertigen, fest.

Für das reguläre System hat man demnach als linearen Ansatz für die Deformationsgeschwindigkeiten (wobei wir mit Rücksicht auf die noch freie Wahl der Zeiteinheit einen Proportionalitätsfaktor unterdrücken) zufolge (12):

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_x = 2\,\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z, & \varepsilon_y = 2\,\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x, & \varepsilon_z = 2\,\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y \\ \gamma_x = \varkappa\, \tau_x, & \gamma_y = \varkappa\, \tau_y, & \gamma_z = \varkappa\, \tau_z \end{array}\right\} \quad . \qquad (37)$$

und für das hexagonale System zufolge (14)

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_x = (1+\lambda)\,\sigma_x - \lambda\,\sigma_y - \sigma_z, & \varepsilon_y = -\lambda\,\sigma_x + (1+\lambda)\,\sigma_y - \sigma_z, & \varepsilon_z = 2\,\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y \\ \gamma_x = \varkappa\, \tau_x, & \gamma_y = \varkappa\, \tau_y, & \gamma_z = (4\,\lambda + 2)\,\tau_z \end{array}\right\} \qquad (38).$$

Dabei wäre es natürlich nicht notwendig, daß $\varkappa$ in (37) und $\varkappa$, $\lambda$ in (38) die gleichen Zahlenwerte haben, wie sie experimentell für die Fließgrenze festgestellt wurden.

Sucht man nun die Größen von $\varkappa$ und $\lambda$ auf Grund von Beobachtungen über die Formänderungsvorgänge zu bestimmen, etwa für den Zinkkristall, für den die quadratische Form als Ausdruck der Fließgrenze gut geeignet ist, so findet man — was gewiß nicht überraschend ist —, daß man mit den gleichen Werten, die für die Fließgrenze maßgebend waren, auch hier am besten auskommt. Legt man etwa die $x$-Achse in die Basisebene des Prismas so, daß die Zugrichtung in die $x$-$z$-Ebene fällt, also $\cos\alpha = \sin\gamma$, $\cos\beta = 0$ wird, so liefert (38) in Verbindung mit (22):

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \sigma[(1+\lambda)\sin^2\gamma - \cos^2\gamma], & \varepsilon_y = \sigma[-\lambda\sin^2\gamma - \cos^2\gamma], & \varepsilon_z = \sigma[2\cos^2\gamma - \sin^2\gamma] \\ \gamma_x = 0, & \gamma_y = \sigma \cdot \varkappa \sin\gamma\cos\gamma, & \gamma_z = 0 \end{array}\right\} \qquad (39).$$

[1]) Meine Arbeit von 1913, S. 586.

Hieraus folgt, daß die $y$-Richtung mit einer Hauptachse der Deformationsgeschwindigkeit zusammenfällt. Der Winkel $\vartheta$ zwischen einer zweiten Hauptachse und der $x$-Richtung ist gegeben durch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\gamma_y}\left[\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \gamma_y^2} - (\varepsilon_x - \varepsilon_z)\right] \sim 1 - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{\gamma_y} \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Der Näherungsausdruck ergibt sich unter der Annahme, daß $\varkappa$ groß gegen $\lambda$ und gegen 1, also $\gamma_y$ groß gegen $\varepsilon_x$ und $\varepsilon_z$ ist, und gilt natürlich nur für Winkel $\gamma$, die nicht nahe $0^0$ oder $90^0$ sind (da hier $\gamma_y$ null wird). Die Voraussetzung trifft zu, wenn wir die aus Abschn. 5 bekannten Werte $\lambda = -{}^1/_2$, $\varkappa = 50$ einsetzen. In diesem Falle wird

$$\varepsilon_x - \varepsilon_z = 3\,\sigma\,({}^1/_2 \sin^2\gamma - \cos^2\gamma) = -{}^3/_4\,\sigma\,(1 + 3\cos 2\gamma)$$

und
$$\operatorname{tg}\vartheta - 1 \sim \frac{3\,(1 + 3\cos 2\gamma)}{2\,\varkappa \sin 2\gamma} = 0{,}030\,\frac{1 + 3\cos 2\gamma}{\sin 2\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40').$$

Der Verlauf von $\vartheta - 45^0$ als Funktion von $\cos^2\gamma$ ist in Abb. 14 eingetragen; die bezeichneten Werte für $\cos^2\gamma = 0{,}05$, 0,10 usf. sind nach der genauen Gl. (40) berechnet.

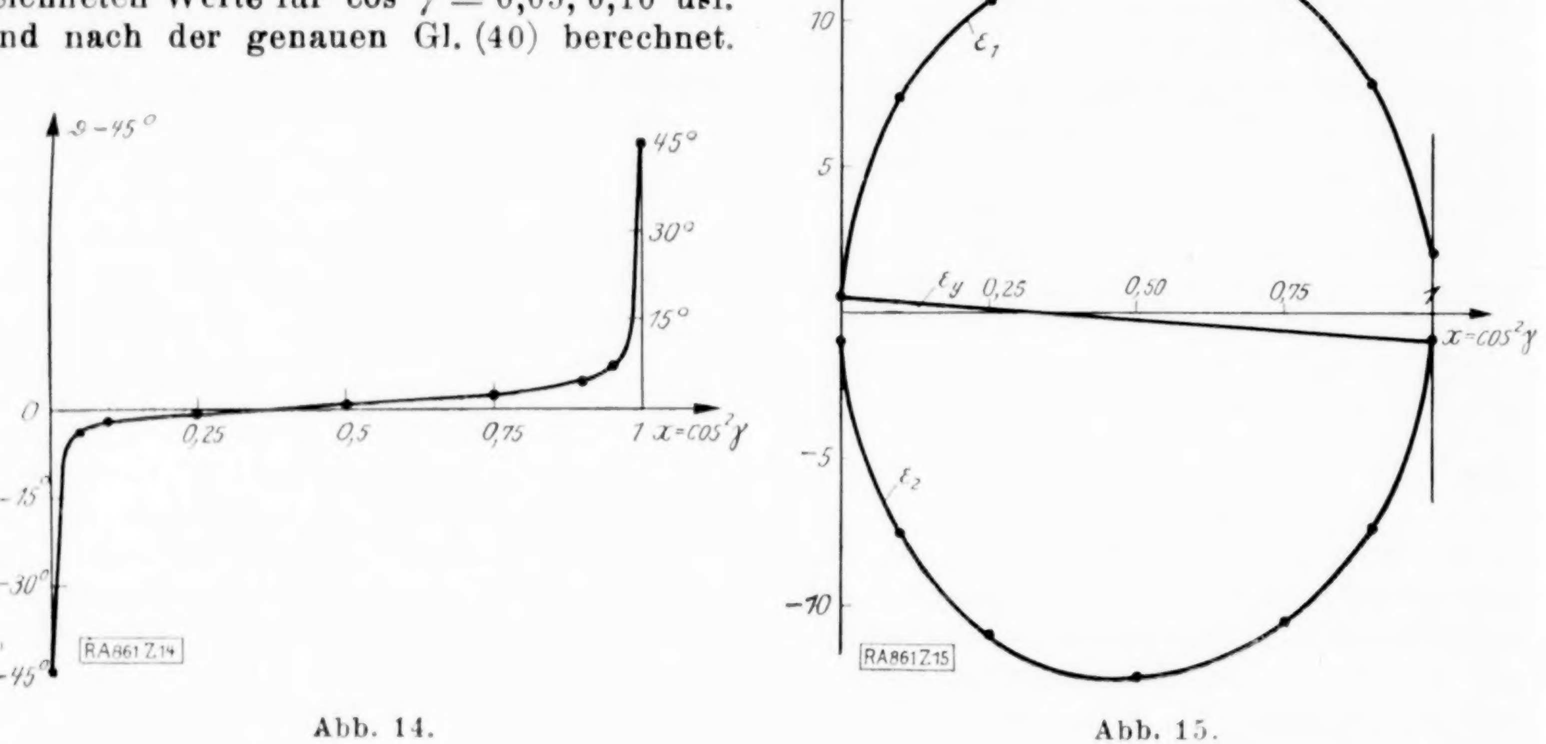



Abb. 14. Abb. 15.

Man sieht, daß der Winkel $\vartheta - 45^0$ im ganzen Versuchsbereich von Abb. 11 verschwindend klein ist, daß also die Hauptachsen fast genau unter $45^0$ gegen die Basisebene des Prismas stehen. Die zugehörigen Hauptwerte

$$\frac{1}{2}\left[-\varepsilon_y \pm \sqrt{\gamma_y^2 + \varepsilon_y^2 - 4\,\varepsilon_x\,\varepsilon_z}\right] \sim \frac{1}{2}(\pm\gamma_y - \varepsilon_y) = \frac{\sigma}{4}\left[\varkappa\sin^2\gamma + (1-\lambda)\cos^2\gamma + 1 + \lambda\right]$$
$$= \frac{\sigma}{8}\left[\pm 100\sin 2\gamma + 3\cos 2\gamma + 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40'')$$

sind in Abb. 15 zugleich mit dem dritten Hauptdehnungswert $\varepsilon_y$ eingetragen. Das Resultat ist in die Augen fallend dies: Die Deformation kann für Zugrichtungen, die nicht ganz nahe parallel der Basisebene oder der Prismenachse sind, mit großer Annäherung als ebene betrachtet werden ($\varepsilon_y$ sehr klein gegen die anderen Hauptwerte); dabei fallen die Hauptgleitrichtungen (die die wirksamen Hauptachsen unter $45^0$ schneiden) fast genau in die Basisebene und die dazu Senkrechte. Nach dem früher Gesagten werden damit die Beobachtungsergebnisse mit großer Genauigkeit wiedergegeben.

Wir werden auf diese Weise zu der Frage geführt, ob nicht auch für isotrope Körper, die als Fließfunktion den Ausdruck (4) aufweisen, die Beziehungen (36) zu Recht bestehen? In der Tat ist dies der Fall, denn durch Differentiation von (4) findet man

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = 2\,(2\,\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) = 6\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\right) = \sigma_x', \qquad \frac{\partial F}{\partial \tau_x} = 12\,\tau_x,$$

also nach (36)

$$\varepsilon_x = 6\,\sigma_x', \quad \varepsilon_y = 6\,\sigma_y', \quad \varepsilon_z = 6\,\sigma_z'; \qquad {}^1/_2\,\gamma_x = 6\,\tau_x, \quad {}^1/_2\,\gamma_y = 6\,\tau_y, \quad {}^1/_2\,\gamma_z = 6\,\tau_z \quad (41),$$

d. h. der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit ist bis auf einen Faktor gleich dem der Zusatzspannungen. Das ist der gleiche Ansatz, den ich 1913, in Uebereinstimmung mit

M. Lévy, dessen Arbeit [1]) mir damals nicht bekannt war, entwickelt habe; ein Ansatz, der für isotrope Körper höchst plausibel erscheint, aber bis heute durch Beobachtungen noch nicht genügend sichergestellt ist.

Diese Ergebnisse legen es weiter nahe, zu überlegen, ob die Beziehungen (36) nicht auch dann bestehen, wenn $F$ erfahrungsgemäß nicht als quadratische Funktion der Spannungskomponenten angenommen werden kann. Es würde dann natürlich der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit nicht mehr linear vom Spannungstensor abhängen. Vor allem müssen wir sehen, ob der Ansatz überhaupt sinnvoll ist, d. h. bei beliebiger Wahl der Koordinatenrichtungen den gleichen Deformationstensor liefert. Wir denken uns zu diesem Zweck in $F$ mit Hilfe des Schemas (10) neue Spannungskomponenten $\sigma_{x'}, \ldots \tau_{z'}$ eingeführt und bilden

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{x'}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_{x'}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial \sigma_{x'}} + \ldots \frac{\partial F}{\partial \tau_z} \cdot \frac{\partial \tau_z}{\partial \sigma_{x'}} = \varepsilon_x \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_{x'}} + \varepsilon_y \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial \sigma_{x'}} + \ldots \gamma_z \cdot \frac{\partial \tau_z}{\partial \sigma_{x'}} .$$

Die Differentialquotienten in dem letzten Ausdruck kann man ebenfalls aus dem Schema (10) entnehmen, wenn man hier die gestrichenen mit den ungestrichenen Größen vertauscht, so daß z. B. die Elemente der letzten Zeile (nach Vertauschung von $x$ mit $x'$ usf.) die Koeffizienten von $\sigma_{x'} \ldots \tau_{z'}$ in dem Ausdruck für $\tau_z$ sind. Die Elemente der ersten Spalte liefern nach Vertauschung der gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben die sechs gesuchten Differentialquotienten. Es ist also $\partial \sigma_x / \partial \sigma_{x'} = (x\,x')^2 \ldots \partial \tau_z / \partial \sigma_{x'} = (x\,x')\,(y\,x')$. Setzt man dies oben ein und beachtet, daß sich $\varepsilon_{x'}$ durch $\varepsilon_x, \ldots {}^1/_2\,\gamma_z$ nach der ersten Zeile des Schemas (10) darstellt, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{x'}} = \varepsilon_x \cdot (x\,x')^2 + \varepsilon_y \cdot (y\,x')^2 + \ldots \frac{1}{2}\,\gamma_z \cdot 2\,(x\,x')\,(y\,x') = \varepsilon_{x'} \quad . \quad . \quad (42),$$

w. z. b. w. Die Bildung (36) ist in der Tensoranalysis das Analogon zu dem aus der Vektorrechnung bekannten Gradienten einer skalaren Ortsfunktion, der, wie man weiß, ein Vektor ist.

Damit ist natürlich nur die formale Zulässigkeit des Ansatzes (36) erwiesen. Daß er bei der Wahl der Fließfunktion für $F$ den Beobachtungsergebnissen entspricht, erkennen wir, sobald wir etwa für $F$ die beim Aluminium gültige Schubspannungshypothese wählen. Sei etwa $\sigma_x \ldots \tau_z$ ein Spannungszustand, für den ein eindeutig bestimmtes unter den zwölf ausgezeichneten Achsenpaaren den größten Schubspannungswert liefert. Wir wählen diese beiden Achsen zur $x$- und $y$-Achse eines Koordinatensystems. Dann lautet die Fließbedingung für eine gewisse endliche Umgebung des betrachteten Spannungszustandes einfach $\tau_z =$ konst. Wir haben also $F = \tau_z$, und nach (36) sind sämtliche Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit außer $\gamma_z$ gleich Null. Das ist die in (33) betrachtete Deformation, die wir als eine zweidimensionale oder eine Gleitung erkannt haben, und dabei fallen die Gleitachsen mit den ausgezeichneten Spannungsachsen zusammen, wie es die Beobachtungen zeigen. Die Beziehungen (36) lehren also, daß Konstanz der Schubspannung als Fließgrenze und einfache Gleitung längs derselben Achsen als Deformation einander wechselseitig bedingen.

In den Grenzgebieten, in denen der Schubspannungswert für zwei oder mehr ausgezeichnete Achsenpaare den Höchstwert annimmt, ist die Funktion $F$, wenn man die Schubspannungshypothese in der strengsten Form aufrechterhalten will, nicht differenzierbar, also (36) nicht unmittelbar anwendbar. Die Deformationsform an den Grenzen bliebe dann unbestimmt. Es scheint aber mit den Beobachtungen (der »doppelten Gleitung« von Taylor und Elam) besser übereinzustimmen, wenn man annimmt, daß die Funktion $F$, im sechsdimensionalen Raum der $\sigma_x \ldots \tau_z$ betrachtet, nicht durch ein Polyeder mit scharfen Kanten dargestellt wird, sondern Ausrundungen, stetige Uebergänge aufweist. In diesem Falle würde (36) besagen, daß die einfache Gleitung eben nur dann Geltung hat, wenn der Spannungszustand noch einigermaßen von der Grenze entfernt ist, in der unmittelbaren Nähe der Grenzgebiete aber eine Uebereinanderlagerung ebener Deformationen eintritt. Natürlich können auch hier in letzter Linie nur Versuche entscheiden.

Es mag noch von Interesse sein, zu überlegen, was bei isotropen Körpern die Mohrsche Schubspannungsbedingung für Folgerungen aus (36) ergibt. Ein ähnlicher Gedankengang wie der oben durchgeführte zeigt hier: Sobald nur eine der drei Hauptspannungsdifferenzen den kritischen Wert besitzt, muß die Deformation eine einfache Gleitung in den Richtungen der kritischen Schubspannung sein. In den Grenzgebieten,

[1]) M. Lévy, Journal de mathém. 1871, S. 369.

für die das Schubspannungsmaximum mehr als einmal erreicht wird, z. B. beim reinen Zugversuch, würde dasselbe gelten, was oben hierüber gesagt wurde. — Es ist mir nicht bekannt, ob irgendwelche Beobachtungen an isotropen plastischen Körpern eine Andeutung der ebenen Formänderung gezeigt haben. Es wäre von höchstem Interesse, dies im Zusammenhang mit der Gestalt der Fließgrenze zu untersuchen, da man damit den besten Anhaltspunkt zur Ueberprüfung der Haupthypothese (36) erhielte.

Es liegt schließlich nahe, Gl. (36) »energetisch« zu deuten und statt der Differentialbeziehungen ein »Arbeitsprinzip« zu formulieren. Bedenkt man, daß die $\varepsilon_x \ldots {}^1/_2 \gamma_z$ für die Deformationsgeschwindigkeiten stehen, so stellt

$$L = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_x \tau_x + \gamma_y \tau_y + \gamma_z \tau_z \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

die Leistung der inneren Spannungen pro Volumeinheit des Körpers vor. Variiert man die Spannungen unter Festhaltung der $\varepsilon_x, \ldots {}^1/_2 \gamma_z$, so erhält man nach (36)

$$\delta L = \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \ldots \gamma_z \delta \tau_z = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \ldots \frac{\partial F}{\partial \tau_z} \delta \tau_z = \delta F \quad (44).$$

Wenn man mit den Spannungen innerhalb der Fließgrenze $F =$ konst. bleibt, ist $\delta F = 0$ und man erhält so die folgende Deutung von (36): Die Deformationsgeschwindigkeiten des plastischen Körpers unter Einfluß eines Spannungszustandes, der an der Fließgrenze liegt, regeln sich derart, daß sie bei einer unendlich kleinen Variation der Spannungen innerhalb der Fließgrenze keine zusätzliche Arbeit leisten. Man kann hieraus in der früher beliebten, aber mathematisch unzulässigen Weise ein Extremalprinzip machen, etwa indem man sagt: Die wirklich aufgewandte Deformationsleistung ist ein Extremum gegenüber allen Leistungsbeträgen, die bei der gleichen Deformation, aber anderen, an der Fließgrenze liegenden, Spannungen verbraucht würden.

Nochmals sei darauf hingewiesen, daß dieses neue »Arbeitsprinzip« nichts zu tun hat mit der naiven Deutung der Fließfunktion $F$ als »Gestaltänderungsenergie«. Abgesehen davon, daß hierbei die Funktion $F$ als quadratischer Ausdruck in den Spannungen vorausgesetzt wird, was sie nicht immer ist, darf auch die Gl. (44) $\delta L = \delta F$ nicht etwa mißverstanden werden: Sie gilt nur unter der im Eingange dieses Abschnittes gemachten Voraussetzung, daß der Zeitmaßstab willkürlich ist, besagt also eigentlich nur, daß $\delta L$ sich als Produkt von $\delta F$ in einen mit Ort und Zeit wechselnden Faktor darstellen läßt. — Auch zu einem älteren Versuch von A. Haar und Th. v. Kármán[1]), die Plastizitätsmechanik durch einen Energiesatz zu begründen, sehe ich keine Beziehung. Von den genannten Autoren wird das Integral über eine quadratische Funktion der Spannungen zu einem Extremum gemacht unter der Nebenbedingung, daß die Spannungen an der Fließgrenze bleiben, die selbst nicht durch eine quadratische Form dargestellt wird.

**8. Die vollständigen Bewegungsgleichungen.** Ist $\mu$ die spezifische Masse, $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten $v_x$, $v_y$, $v_z$; $\varkappa$ der Vektor der spezifischen Volumkraft mit den Komponenten $\varkappa_x$, $\varkappa_x$, $\varkappa_z$, so kann man die Bewegungsgleichungen, nach Abtrennung des hydrostatischen Druckes $-p$ von der Gesamtspannung in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{d v_x}{d t} &= \varkappa_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \\ \mu \frac{d v_y}{d t} &= \varkappa_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \\ \mu \frac{d v_z}{d t} &= \varkappa_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I}).$$

Dazu tritt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}).$$

Für die Spannungsgrößen $\sigma_x'$, $\sigma_y'$, $\sigma_z'$ gilt die Beziehung $\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$, so daß in (I) und (II) zusammen 9 Unbekannte vorkommen, die drei Komponenten von $\mathfrak{v}$ und die sechs Spannungsgrößen: $p$, die Differenzen der $\sigma'$ und die $\tau$. Zwischen den Spannungen besteht nun noch die Fließbedingung

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z) = \text{konst.} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{III}),$$

[1]) Nachr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. Göttingen 1909.

in der man ebensogut $\sigma'$ an die Stelle von $\sigma$ setzen kann, weil voraussetzungsgemäß $F$ unverändert bleibt, wenn die $\sigma$ um eine additive Konstante $p$ verändert werden.

Wir haben nun weiter die Beziehungen (36) hinzuzufügen, müssen aber jetzt, da wir keinen willkürlichen Zeitmaßstab mehr benutzen dürfen, einen Faktor $c$ einführen und schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} = c\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = c\frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = c\frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = c\frac{\partial F}{\partial \tau_x}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} = c\frac{\partial F}{\partial \tau_y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = c\frac{\partial F}{\partial \tau_z} \end{array}\right\} \quad . \quad (IV).$$

Von diesen sechs Gleichungen sind nur fünf unabhängig, da die Summe der ersten drei zufolge der eben erwähnten Eigenschaft von $F$ wieder (II) ergibt. Mit (IV) ist aber eine neue Unbekannte $c$ hinzugekommen, so daß wir im ganzen 10 Gleichungen für 10 Unbekannte vor uns haben.

Mit diesem Ansatz kann man zunächst nur das Gleichgewichtsproblem, genauer gesprochen, das Problem der Spannungsermittlung für einen Zeitmoment, beherrschen. Setzt man alle Beschleunigungen und äußeren Kräfte (bzw. ihre Summe) gleich Null, so besagen die Gl. (I), daß die Spannungen allein ein Gleichgewichtssystem bilden müssen. Zu den vier Gleichungen (I) und (III) für die sechs Spannungskomponenten treten zwei »Kompatibilitätsbedingungen«, die man durch Elimination von $v_x$, $v_y$, $v_z$ und $c$ aus den Gl. (II) und (IV) (die der Zahl nach dazu gerade ausreichen) erhält. Man muß annehmen, daß die sechs Differentialgleichungen zusammen mit den Randbedingungen — etwa der vollständigen Angabe der Spannungen am ganzen Umfang — die Spannungsverteilung und damit nach (IV) die Deformationsgeschwindigkeiten im ganzen Innern bestimmen. Denkt man sich nun die entsprechenden Verrückungen in der Zeit $dt$ an dem Körper ausgeführt, so hat man eine neue Konfiguration vor sich, in der wieder die äußeren Spannungen als gegeben vorauszusetzen sind. Dies genügt aber noch nicht: Man muß auch die Veränderungen kennen, die inzwischen in der räumlichen Orientierung der Kristallachsen eingetreten ist. Hier liegt in der Tat eine Lücke vor, die durch das Zusammentreffen der makroskopischen Theorie der Kontinuitätsmechanik mit den mikroskopischen Anschauungen der Kristalltheorie bedingt wird. Bei der gegenwärtigen Unsicherheit hinsichtlich fast aller wesentlichen Grundlagen des Ansatzes (I) bis (IV) lohnt es jedoch nicht, auf die Fragestellungen, die an diesem Punkt einsetzen, näher einzugehen. Man wird sich vorläufig schon zufrieden geben, wenn es gelingt, Probleme des Gleichgewichtes von dem hier entwickelten Standpunkt der exakten Kontinuitätsmechanik aus zu behandeln. 861

# Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte.

Von M. HANSEN in Aachen.

(Mitteilung aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Die vorliegende Arbeit berichtet über Messungen der Verteilung der Luftgeschwindigkeit in der Nähe einer ebenen Platte, die zum Luftstrom parallel gerichtet ist.

## 1. Bezeichnungen, Definitionen und theoretische Ergebnisse.

$\varrho$ = Dichte der Luft,
$\mu$ = Zähigkeit der Luft,
$\nu$ = kinematischer Zähigkeitskoeffizient,
$x$ = Abstand der Meßstelle von der Anströmkante,
$y$ = Abstand der Meßstelle von der Platte,
$l$ = Länge der Platte (50 cm),
$b$ = Breite der Platte (38 cm),
$U$ = Luftgeschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht,
$u$ = Komponente der Grenzschichtluftgeschwindigkeit parallel zur Platte,
$\delta$ = Grenzschichtdicke,
$\tau_0$ = Schubspannung an der Platte,

$$\left.\begin{array}{l} R_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \\ R_x = \frac{Ux}{\nu} \\ R_y = \frac{uy}{\nu} \end{array}\right\} \text{Kennzahlen.}$$

Für den Fall laminaren Strömungszustandes ist es bekanntlich L. Prandtl und H. Blasius[1]) gelungen, die Geschwindigkeitsverteilung theoretisch zu ermitteln. Die Ergebnisse der Theorie sind kurz zusammengestellt folgende:

[1]) H. Blasius, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 56 (1908), Heft 1.

Es sei $x$ die Koordinate längs der Platte, $y$ die senkrechte dazu, $U$ die Geschwindigkeit des ungestörten Luftstroms. Die Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Werte von $x$ haben ähnlichen Verlauf, wobei die Entfernung, in welcher derselbe Wert der Geschwindigkeit auftritt, mit $\sqrt{x}$ wächst. Die Geschwindigkeit gehorcht dem Ansatz:

$$u = U f\left(y \sqrt{\frac{U}{x \nu}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Zum Vergleich mit dem Experiment ist es zweckmäßig, eine »Grenzschichtdicke« einzuführen, obwohl man dieser keinen exakten Sinn zuschreiben kann, da die Geschwindigkeit $u$ asymptotisch in $U$ übergeht. Man kann z. B. die Werte $y$ als Grenzschichtdicke bezeichnen, für welche die Funktion $f$ um einen bestimmten Bruchteil (z. B. 1 vH) von 1 sich unterscheidet. Nähert man die Funktion $f$ in Gl. (1) durch eine Parabel an, die in die Linie $u = U$ unter Berührung übergeht, so erhält man für den Uebergangspunkt:

$$y = 5{,}5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Wir wollen für den Vergleich mit den Messungen diese Größe $y$ als Grenzschichtdicke einführen.

Die Reibung an der Wand wird durch $\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ gegeben. Sie beträgt nach der Blasiusschen Theorie

$$\tau_0 = 0{,}332\, \varrho\, U^2 \frac{1}{\sqrt{R_x}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Verschiedene Beobachtungen haben Prandtl zu der Vermutung geführt, daß die laminare Strömung bei wachsender Kennzahl in einen turbulenten Zustand übergeht (in ähnlicher Weise, wie dies bei der Strömung durch ein Rohr der Fall ist). Da wir das Elementargesetz der turbulenten Reibung bisher nicht kennen, läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung für diesen Fall theoretisch nicht ermitteln. Wenn man indessen die für Rohre experimentell festgestellte Geschwindigkeitsverteilung und das ebenfalls experimentell gefundene Widerstandsgesetz auf den Fall der Grenzschicht überträgt, so läßt sich mit dem Impulssatz auch für diesen Fall die Grenzschichtdicke ermitteln. Diese Rechnung wurde von Prandtl und v. Kármán[1]) durchgeführt. Man findet für die Grenzschichtdicke:

$$\delta = 0{,}370\, R_x^{-1/5} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

und für die Schubspannung:

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \varrho\, U^2 \left(\frac{U \delta}{\nu}\right)^{-1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Die zugrunde gelegte Geschwindigkeitsverteilung lautet:

$$\text{Für} \quad 0 < y < \delta \quad \text{sei} \quad u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{und für} \quad y > \delta \quad \text{sei} \quad u = U.$$

**2. Die Untersuchungen von Burgers und van der Hegge Zynen.** In den Jahren 1923 bis 1925 untersuchten J. M. Burgers und B. G. van der Hegge Zynen[2]) in der Aerodynamischen Versuchsanstalt der Technischen Hochschule Delft die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht für beide Strömungszustände und besonders für den Uebergang zwischen beiden. Im laminaren Gebiet fanden sie bezüglich der Grenzschichtdicke gute Uebereinstimmung zwischen Theorie und Messung. Größere Abweichungen zeigte indessen der Verlauf der Schubspannung, und zwar sowohl, wenn man sie aus dem Geschwindigkeitsgefälle an der Platte ermittelte, als auch auf Grund des Impulssatzes mit Hilfe der Formel

$$\tau_0 = \frac{d}{d x} \varrho \int_0^{\delta} u\,(U - u)\, d y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Der Uebergang vom laminaren zum turbulenten Gebiet konnte mit ziemlicher Schärfe festgestellt werden, wenn man die durch Messung gefundene Grenzschichtdicke als Funktion der Koordinate $x$ auftrug. Die so erhaltene Kurve zeigt bei einem bestimmten Wert von $R_x$ einen ausgesprochenen Knick. Man kann diesen Wert von $R_x$ als die »kritische

[1]) Abh. a. d. Aerodyn. Inst. d. Techn. Hochsch. Aachen, diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 233 bis 298.

[2]) Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface, Delft 1924.

Kennzahl« bezeichnen. Andererseits kann man der Grenzschicht selbst eine Kennzahl zuschreiben, indem man die Größe $R_\delta = \frac{U\,\delta}{\nu}$ bildet. $R_\delta$ und $R_x$ hängen nach der Theorie durch die Beziehung $R_\delta = 5{,}5\,\sqrt{R_x}$ zusammen, was auch durch die Versuche angenähert bestätigt wurde. Die Messungen zeigten, daß $R_\delta$ zwischen 1650 und 3500 schwankt, also bedeutend größer ist als in Rohren. Bezüglich des turbulenten Bereiches ergaben die Messungen, daß die Proportionalität der Geschwindigkeit mit $\sqrt[7]{y}$ angenähert zutrifft. Der Verlauf der Grenzschichtdicke entspricht nicht der Formel $\delta = 0{,}370\,x\,R_x^{-1/5}$, weil bei deren Ableitung vorausgesetzt wurde, daß der turbulente Strömungszustand bereits bei $x = 0$ einsetzt, während in Wirklichkeit im Anfang bis zum kritischen Wert von $R_x$ die Luft laminar strömt. Van der Hegge Zynen hat die Formel durch Einführung eines Parameters $x_0$ erweitert, indem er setzt:

$$\delta = 0{,}37\,(x - x_0)^{4/5}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{-1/5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wobei $x_0$ insbesondere von der Ausbildung (Zuschärfung oder Abrundung) der Anströmkante der Platte abhängt. Durch die so abgeänderte Formel kann man die Meßergebnisse gut wiedergeben.

**3. Das Ziel der neuen Versuche und die Versuchseinrichtung.** Meine eigenen Messungen sollten nun einerseits die Unstimmigkeiten klären, die in den soeben dargelegten Versuchen auftraten, andererseits die Geschwindigkeitsverteilung bei Platten mit rauhen Oberflächen ermitteln.

Die Mittel für diese Versuche wurden von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt.

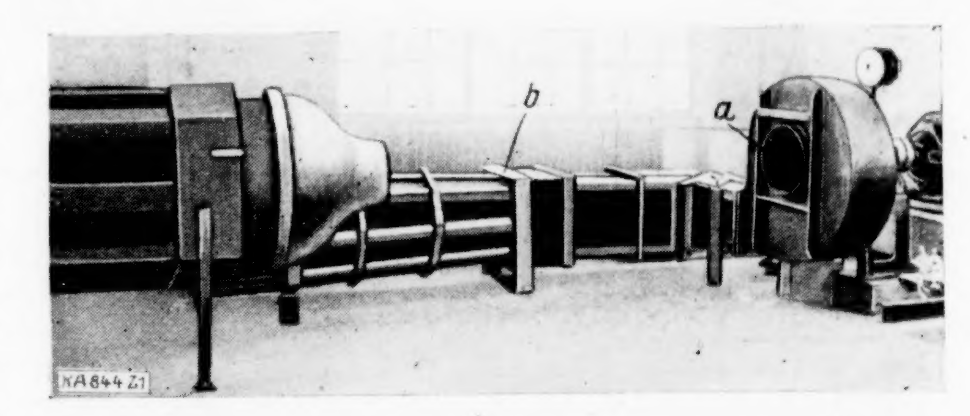



Abb. 1.

Die Messungen wurden ausgeführt im Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen am kleinen Windkanal (Abb. 1 und 2), (Düsendurchmesser 30 cm, freie Meßlänge von der Düse bis zur Ansaugöffnung rd. 2,5 m), und zwar im freien Strahl, weil hierbei der statische Druck konstant bleibt, was für die angewandte Meßmethode wesentlich ist.

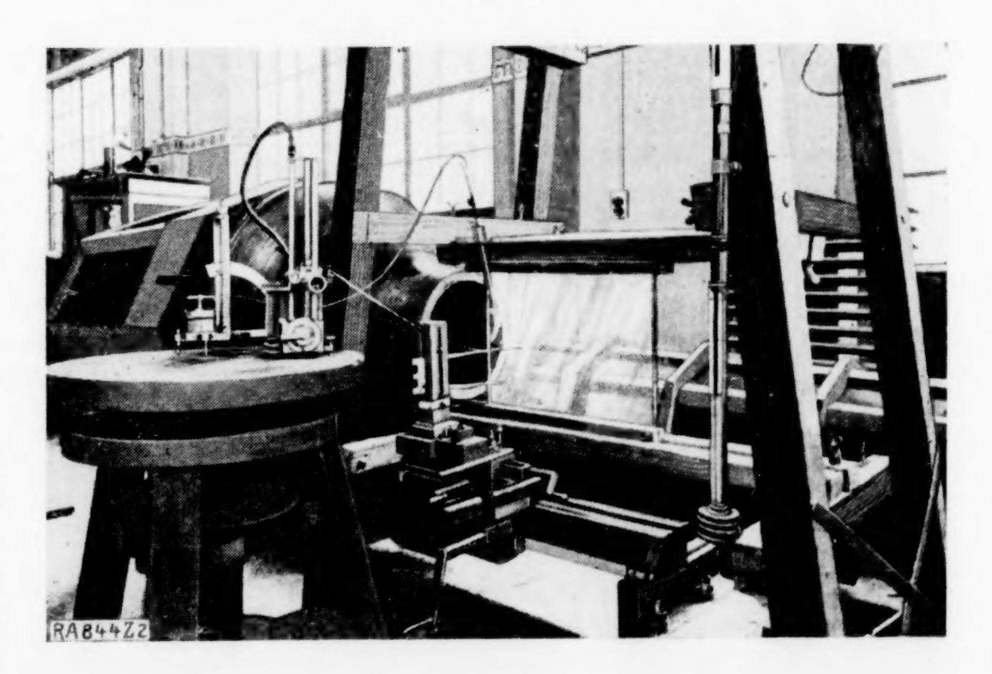



Abb. 2.

Die genaue Regulierung der Windgeschwindigkeit $U$ wurde durch Vergrößern oder Verkleinern der Ventilatoröffnung ($a$ in Abb. 1) mittels aufgelegter Platte erreicht. Mittels Schiebers an einer Stelle ($b$ in Abb. 1) des geschlossenen Teiles des Windkanals zu regulieren, war nicht angängig, weil hierdurch der Luftstrom zu sehr gestört wurde; doch wurde dieses Drosselverfahren angewendet, um künstlich Turbulenz zu erzeugen. Die verwendeten Meßplatten sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Abb. 3 zeigt die zugehörigen Rauhigkeitsprofile. Die Platten wurden nacheinander in einen Holzrahmen des Versuchstandes eingebaut. Unter der jeweiligen Platte befand sich auf einem Betonklotz ein Drehbankbrett, auf dessen Support das Meßinstrument befestigt war. Diese Anordnung ermöglichte es, das Meßinstrument längs der Platte und senkrecht dazu zu verschieben. $x$ wurde an einem Maßstab längs der Platte abgelesen, $y$ (Wandabstand) mit einer am Support eingebauten Schieblehre von $^1/_{100}$ mm Genauigkeit. Die Staudruckablesung er-

**Zahlentafel 1. Verwendete Versuchsplatten.**

| Nr. | Platte | Dicke | Anströmkante |
|---|---|---|---|
| 1 | Dural (Walzhaut), glatt . | 2,5 mm | spitz |
| 2 | Glas (glatt) . . . . . | 9 mm | rund |
| 3 | Glas (glatt) . . . . . | 4,5 mm | spitz (Störung) |
| 4 | Dural (Walzhaut), glatt . | 6 mm | spitz |
| 5 | Glas (wellig) . . . . . | 8 mm | rund |
| 6 | Glas (rauh I) . . . . . | 15 mm | spitz |
| 7 | Glas (rauh II) . . . . | 3,5 mm | rund |

Länge der Platten: $l = 50$ cm.

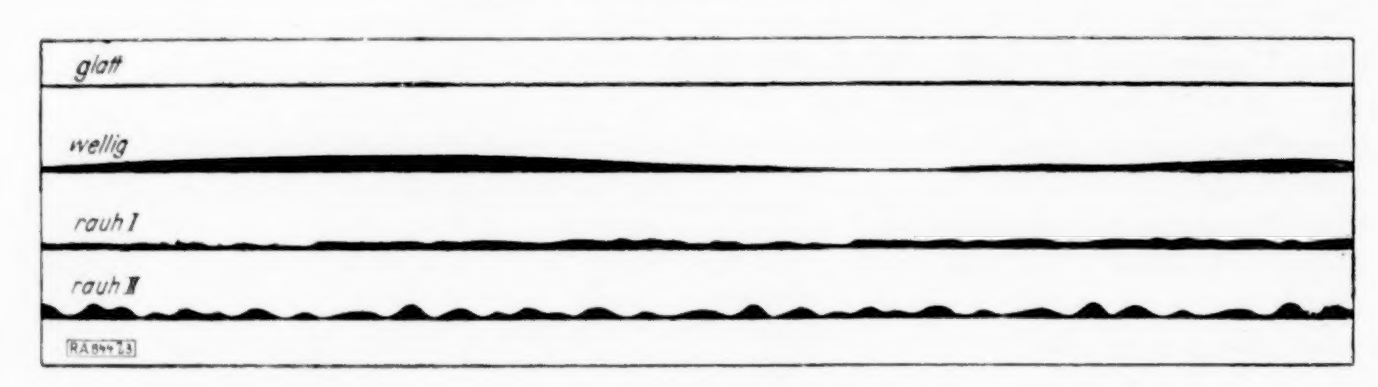



Abb. 3.

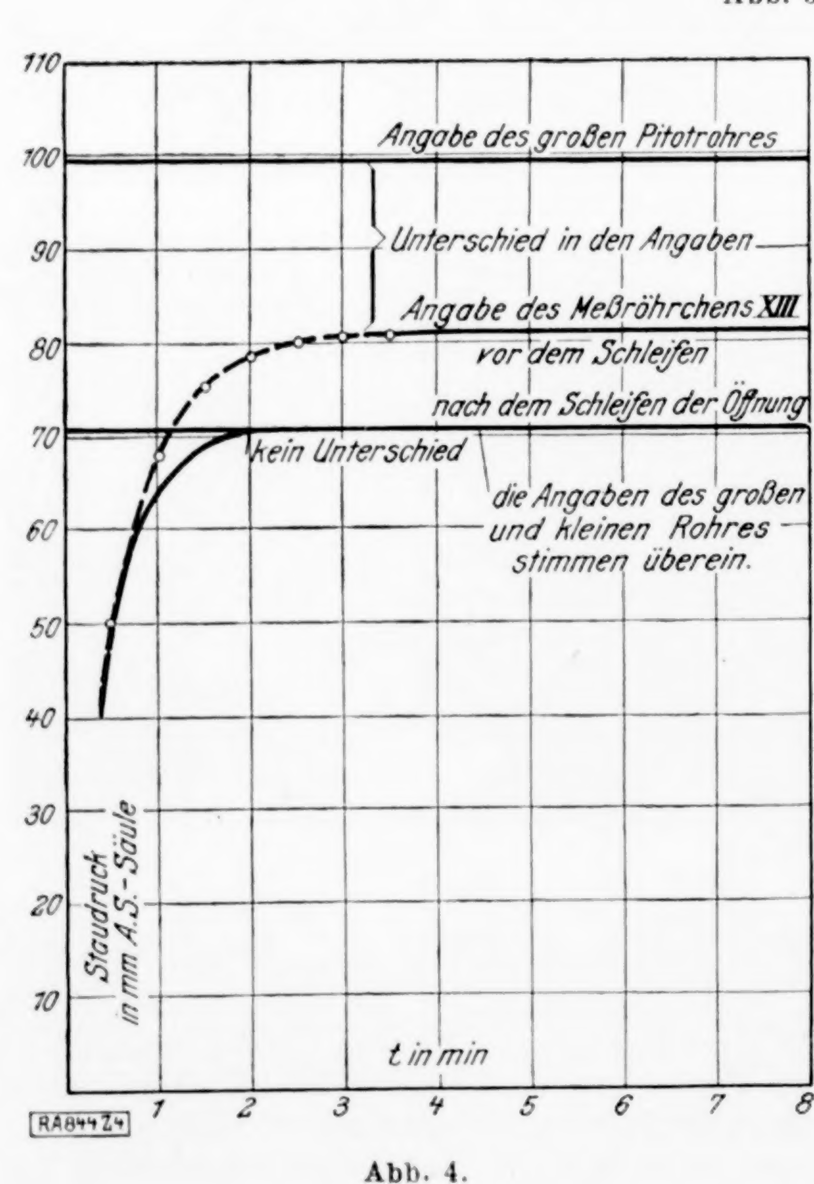



Abb. 4.

folgte mittels zweier Alkoholstaudruckmesser. Temperatur und Druck wurden während der Versuche fortlaufend abgelesen.

Während die Delfter Messungen mit einem Hitzdrahtinstrument vorgenommen wurden, habe ich mich für die Messung mit Pitotröhrchen entschieden, die verhältnismäßig einfach durch Ausziehen und Umbiegen der Enden aus Glasröhrchen von sehr geringem Durchmesser hergestellt werden konnten. Die dünnsten von mir erzielten Röhrchen hatten einen Außendurchmesser von 0,135 mm. Jedoch stellten sie sich zu langsam ein, so daß die Ablesungen zuviel Zeit gekostet hätten.

Am besten bewährte sich Meßröhrchen Nr. XIII (Außendurchmesser 0,35 mm, Innendurchmesser 0,21 mm). Es lieferte die Hauptzahl der Messungen. Abb. 4 zeigt die Eichkurven des genannten Röhrchens. Es wurden zunächst seine Angaben mit denen eines normalen Pitotrohres verglichen. Zeigten sich Abweichungen, so konnte man diese zumeist durch Abschleifen der Oeffnung des Rohrendes beseitigen. Die Messungen konnten nur in einem Geschwindigkeitsbereich

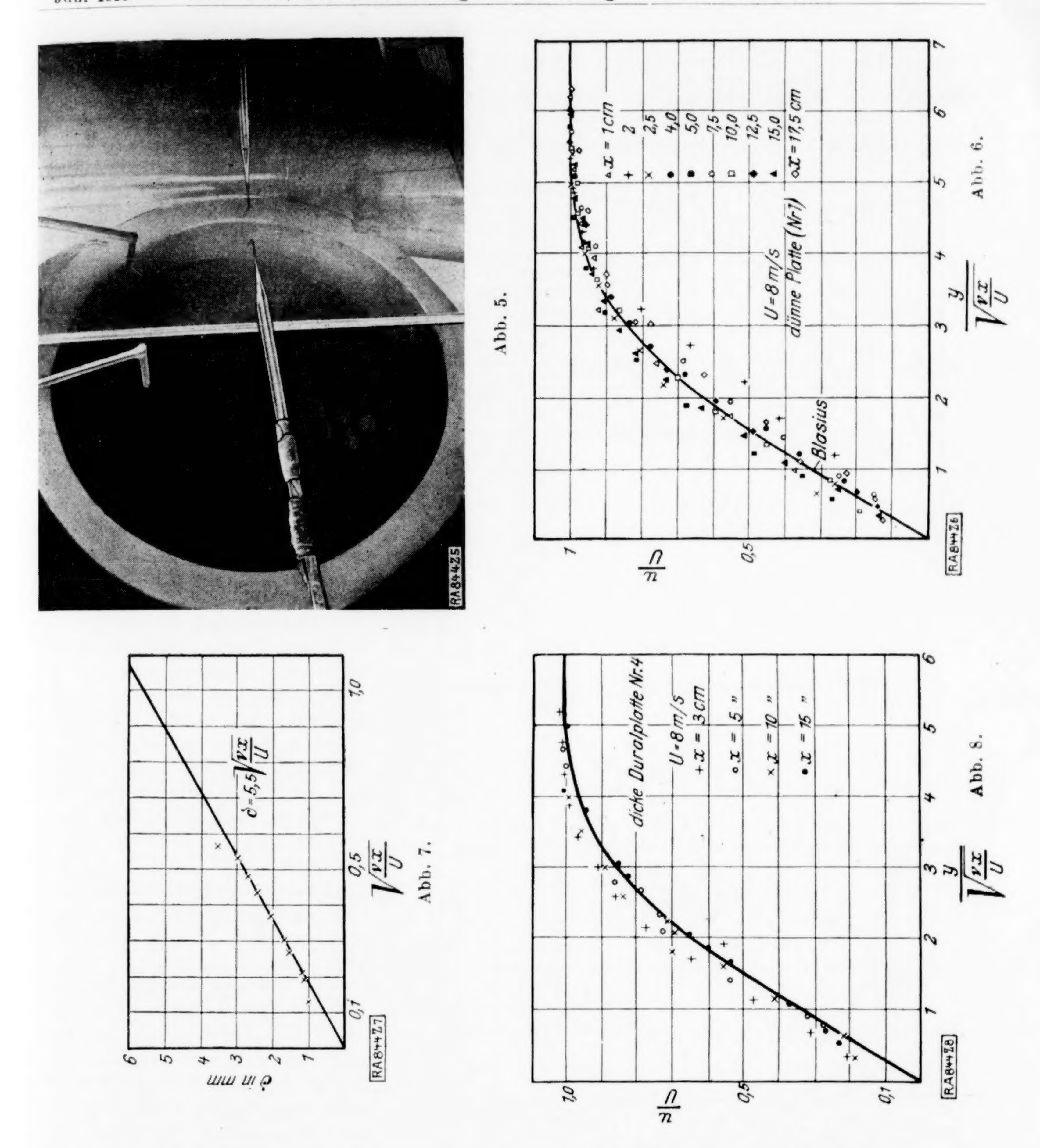



Abb. 5.

Abb. 6.

Abb. 7.

Abb. 8.

von 4 m/s bis 36 m/s ausgeführt werden, da bei größeren Geschwindigkeiten das Meßröhrchen stark vibrierte.

Um den Abstand zwischen Röhrchen und Platte genau festzustellen, mußte ich die Lage ermitteln, in der das Röhrchen die Platte berührte. Diese Lage ist durch Zusammenfallen der Röhrchenspitze mit ihrem Spiegelbild leicht zu erkennen (Abb. 5).

Zur Einstellung der Platte genügte es, sie mittels eines Winkels senkrecht zur Düsenebene zu stellen. Eine genauere Einstellung scheint nicht nötig zu sein; denn ein Vergleich der Geschwindigkeitsverteilung an beiden Seiten der Platte zeigte, daß diese für eine geringe Schiefstellung ziemlich unempfindlich war.

**4. Ergebnisse.** 4a. Laminarer Strömungszustand. Abb. 6 zeigt die Ergebnisse für die dünne Duralplatte Nr. 1. Man sieht, daß die gemessene Geschwindigkeitsverteilung mit der theoretisch berechneten sehr gut übereinstimmt. Das Geschwindig-

keitsverhältnis ist als Funktion der Größe $y \Big/ \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ aufgetragen, und es zeigt sich, daß innerhalb der Meßgenauigkeit die Profile dem Aehnlichkeitsgesetz gut gehorchen.

In Abb. 7 ist die Grenzschichtdicke als Funktion der Größe $\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ aufgetragen und zeigt ebenfalls gute Uebereinstimmung mit der Theorie.

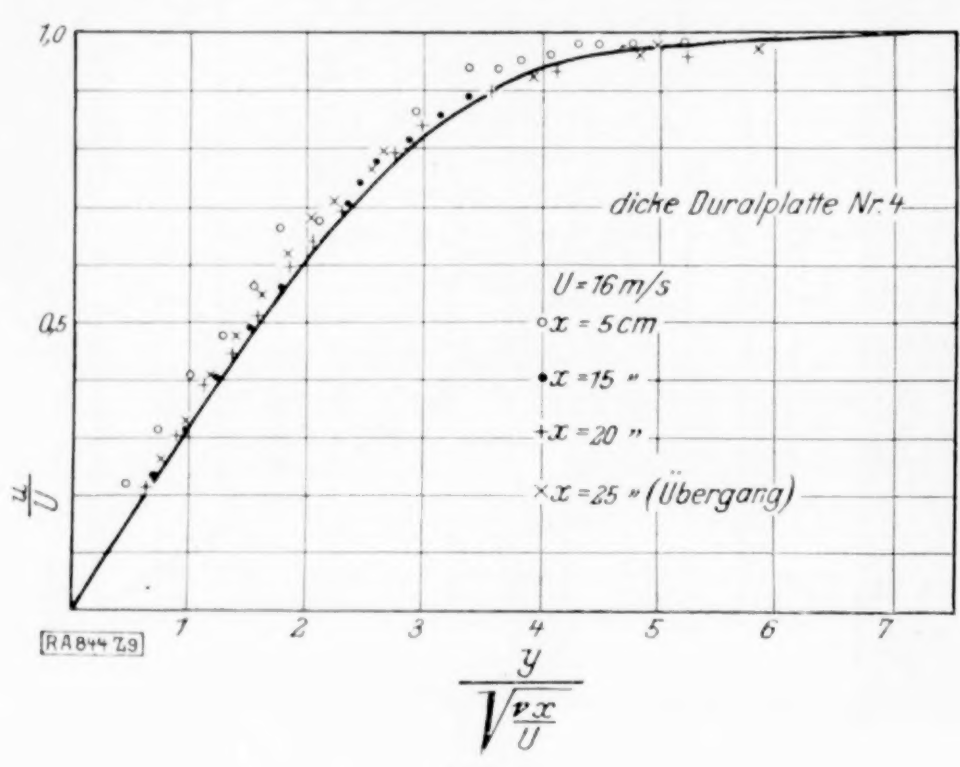



Abb. 9.

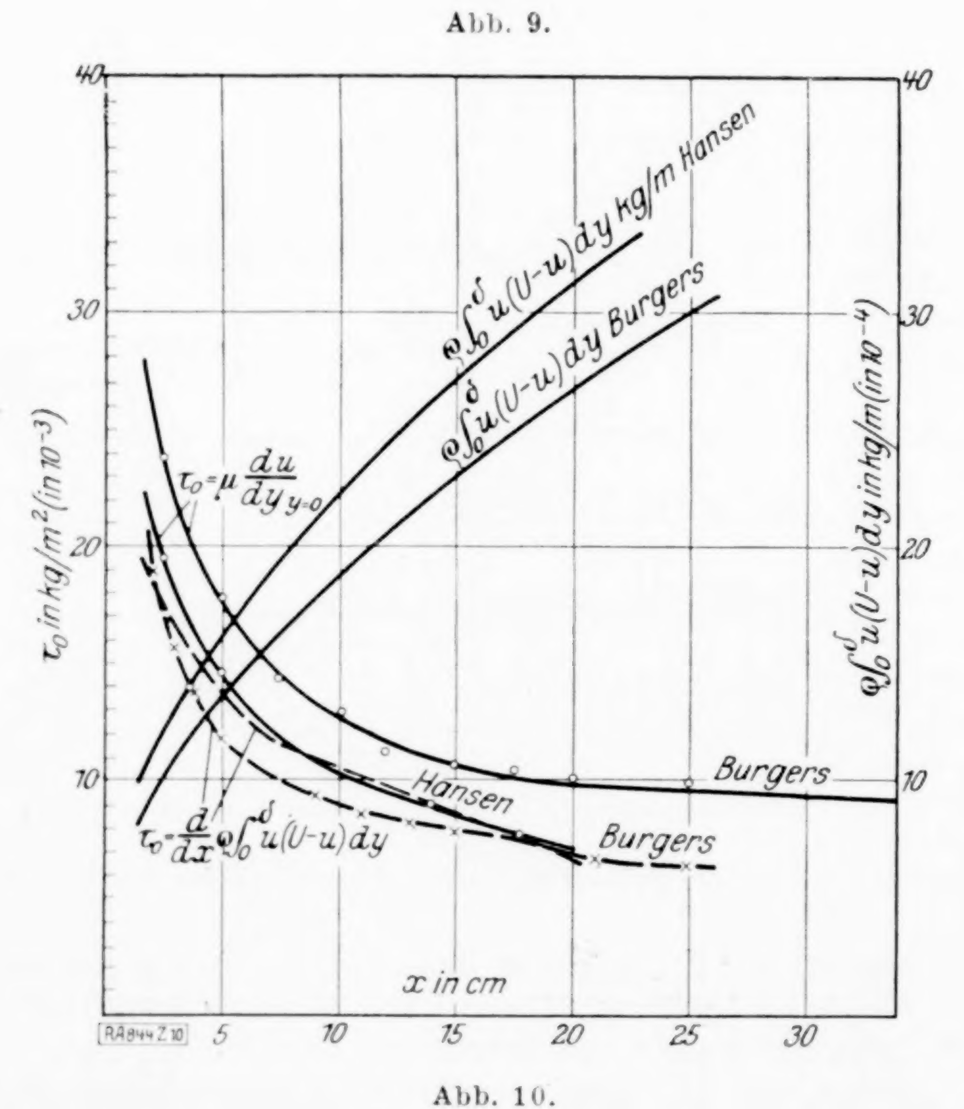



Abb. 10.

Bei der dickeren Platte Nr. 4 (Abb. 8 und 9) zeigen die ersten Profile (kleine Werte von $x$) systematische Abweichungen, die bei größeren Profilen verschwinden.

Abb. 10 gibt eine Nachprüfung der Impulsbilanz durch Vergleich der aus dem Geschwindigkeitsgefälle ermittelten Schubspannung mit dem Wert, welcher aus der Impulsmenge mittels der Formel (6) gefunden wurde.

Wie man aus der Abbildung ersieht, fallen die beiden aus den eigenen Messungen ermittelten Werte ziemlich gut zusammen, während sich bei den Burgersschen Messungen eine Diskrepanz zeigt. Bei den eigenen Messungen ergeben sich Differenzen wieder am Vorderteil der Platte. Daraus läßt sich vermuten, daß die geringen Abweichungen bei meinen Messungen durch den Einfluß der Vorderkante entstehen, während bei den Burgersschen Messungen ein weiterer Grund vorhanden sein muß.

Um den Einfluß der endlichen Plattendicke, besonders aber den Unterschied zwischen abgerundeter und zugeschärfter Platte zu ergründen, habe ich versucht, zunächst die Potentialströmung und dann den Verlauf der Grenzschichtdicke für solche Platten zu berechnen. Die Berechnung der Potentialströmung geschah nach der sogenannten inversen Methode, indem ich Quellenverteilungen annahm, welche, auf die Parallelströmung überlagert, ähnliche Stromlinienformen ergaben wie die von mir verwandten Platten. Das abgerundete Profil kann durch punktförmige Quellen erzeugt werden, während man stetig verteilte Quellen annehmen muß, wenn man das zugeschärfte Profil ersetzen will.

Der aus der Quellenverteilung berechnete Geschwindigkeitsverlauf ist aus Abb. 11 ersichtlich. Außer der Geschwindigkeit ist ihr erster und zweiter Differentialquotient nach der Bogenlänge angegeben, da diese Größen zur Ermittlung der Grenzschichtdicke not-

wendig sind. Die Grenzschichtdicke wurde so berechnet, wie in der Arbeit von A. Pohlhausen[1]) angegeben ist. Abbild. 12 gibt den Verlauf der Größe $z = \delta^2/\nu$ für die beiden in Abb. 11 dargestellten Fälle. Bei der abgerundeten Platte (punktförmige Quelle) wächst die Grenzschichtdicke sehr schnell, und es tritt Ablösung ein. Bei der zugeschärften Platte (lineare Quellenverteilung) ist dagegen die Abweichung von dem Blasiusschen Fall (unendlich dünne Platte) nicht sehr bedeutend. Dieses Ergebnis ist im Einklang mit der Beobachtung, daß bei der abgerundeten Platte schon in geringer Entfernung von der Vorderkante die Grenzschicht turbulent wird, während bei der zugeschärften Platte der laminare Charakter der Strömung sehr lange bestehen bleibt.

Was nun die Messungen von Burgers und van der Hegge Zynen anbelangt, so konnte diese Rechnung die bedeutende Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment, die z. B. bezüglich des Geschwindigkeitsgefälles an der Wand gefunden wurde, nicht aufklären. Die Rechnung könnte höchstens herangezogen werden, um die $S$-förmigen Geschwindigkeitsprofile zu erklären, welche die genannten Forscher gefunden haben. Die Grenzschichttheorie liefert in der Tat solche Geschwindigkeitsprofile, falls ein Druckanstieg bzw. eine Geschwindigkeitsabnahme $\left[U' = \frac{dU}{dx} < 0\right.$ in Abb. 11] vorhanden ist.

Der Grund, weshalb Burgers und van der Hegge Zynen eine bedeutende Abweichung gegen die Blasiussche Theorie gefunden haben, während meine Messungen eine viel bessere Uebereinstimmung zeigen, liegt meiner Ansicht nach darin, daß die Delfter Versuche in einem geschlossenen Windkanal, meine aber in einem freien Strom durchgeführt worden sind. Beim geschlossenen Windkanal muß entspre-

[1]) Abh. Aerodyn. Inst. Aachen, Heft 1.

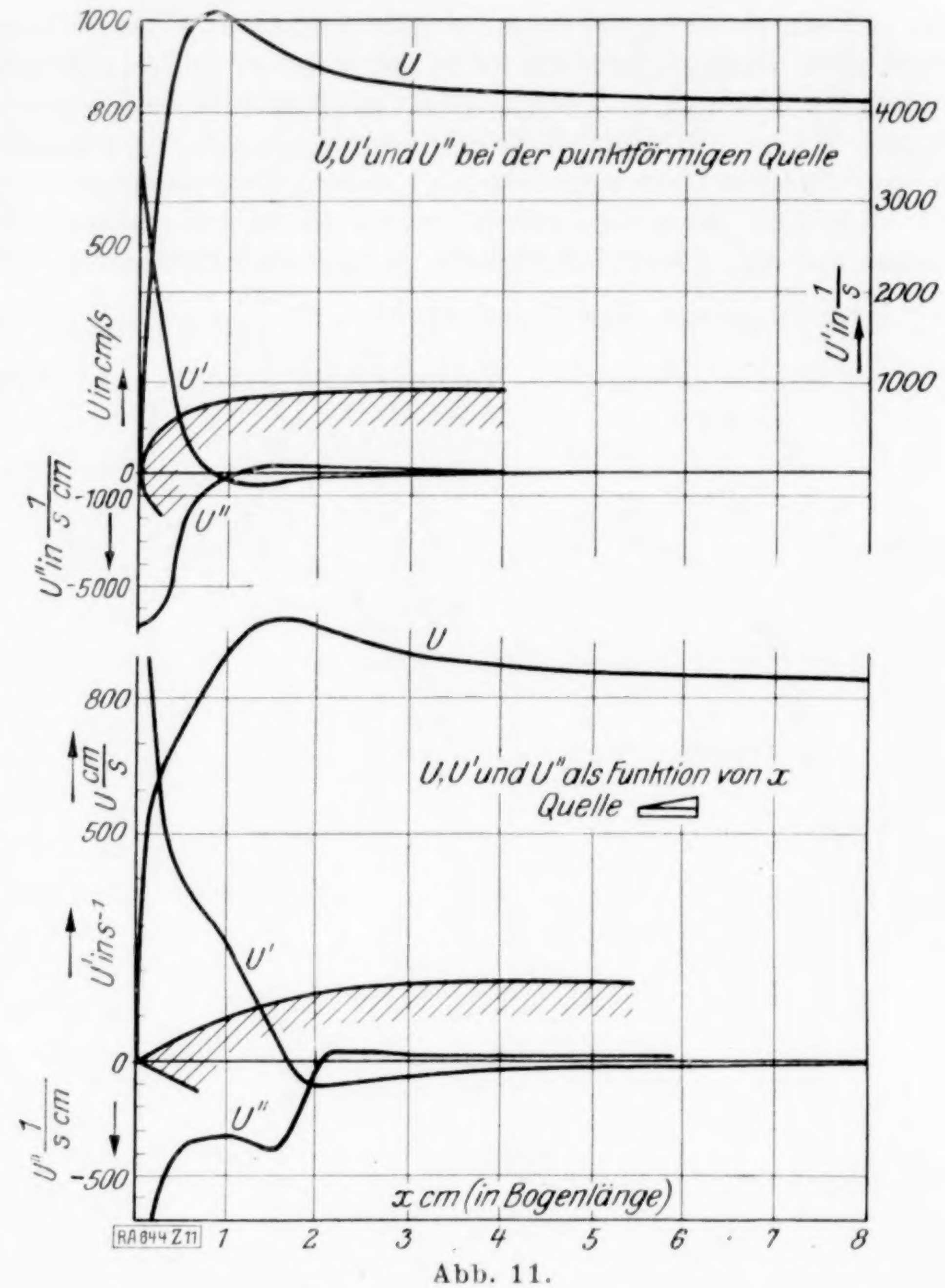



Abb. 11.

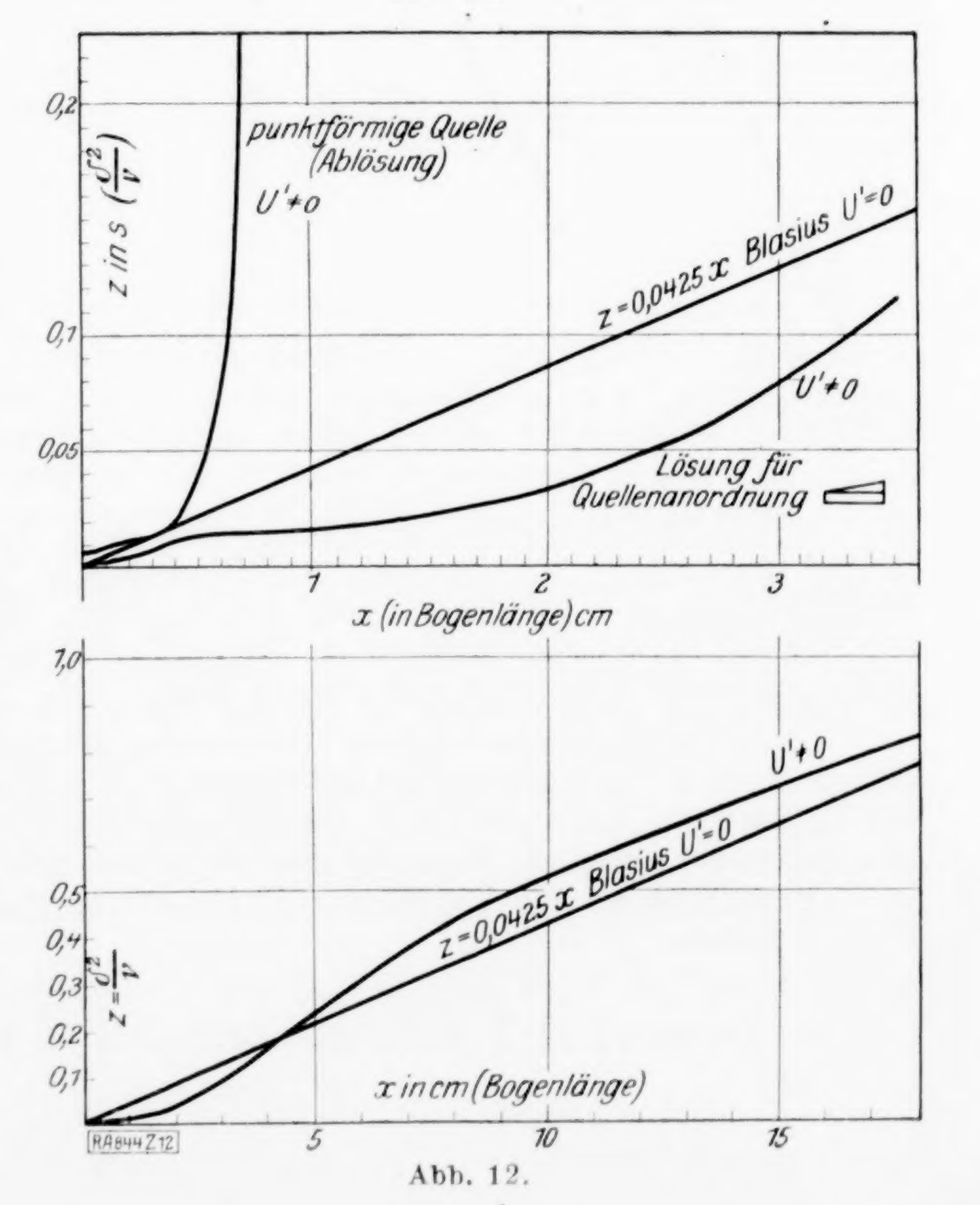



Abb. 12.

chend dem Reibungswiderstand der Wände und der untersuchten Platte selbst ein Druckabfall bzw. eine Vermehrung der Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht entstehen. Die zwischen Kanalwand und Meßplatte durchströmende Luft befindet sich ungefähr in einem ähnlichen Strömungszustand wie in der Anlaufstrecke eines Rohres. Die hierdurch bedingten Abweichungen von der Blasiusschen Theorie lassen sich angenähert rechnerisch fassen, da van der Hegge Zynen, wenn auch an anderer Stelle[1]) und zu anderem Zweck, die Zunahme der Geschwindigkeit längs der Meßplatte selbst festgestellt hat. Er setzt die mittlere Zunahme der Geschwindigkeit $\frac{dU}{dx} = \frac{\beta}{l}\,U$. Der Faktor $\beta$ bedeutet die Zunahme der Geschwindigkeit für die gesamte Länge $l$ in Bruchteilen der Geschwindigkeit $U$. Van der Hegge Zynen findet z. B. $\beta \sim 0{,}06$ für $U = 8$ m/s. Ich habe nun nach der von K. Pohlhausen angegebenen und oben von mir benutzten Methode den Einfluß der Geschwindigkeitszunahme auf die Grenzschichtdicke untersucht und für diese geringere Werte gefunden, als nach der Blasiusschen Theorie zu erwarten war. Eine Abweichung in demselben Sinn zeigen in der Tat die Delfter Messungen. Man kann das Geschwindigkeitsgefälle an der Platte für beide Fälle vergleichen. Zu diesem Zweck habe ich diese Größe in der Weise berechnet, daß ich in die Pohlhausensche Differentialgleichung der Grenzschicht die von van der Hegge Zynen experimentell gefundenen Werte für $\delta$ und den obigen Wert für $U' = \frac{dU}{dx}$ eingesetzt habe. Abb. 13 zeigt das Ergebnis. Die ausgezogene Linie gibt das Geschwindigkeitsgefälle nach der Blasiusschen Berechnung, die gestrichelte zeigt dieselbe Größe nach meiner Rechnung mit Berücksichtigung des Geschwindigkeitsgefälles im Kanal. Man sieht, daß die Uebereinstimmung bis auf den letzten Wert, der einem Geschwindigkeitsprofil in der Entfernung $x = 62{,}5$ cm von der Plattenvorderkante entspricht, sehr gut ist. Bei diesem Profil ist unverkennbar bereits ein Uebergang in den turbulenten Strömungszustand vorhanden, so daß eine Uebereinstimmung nicht mehr erwartet werden kann.

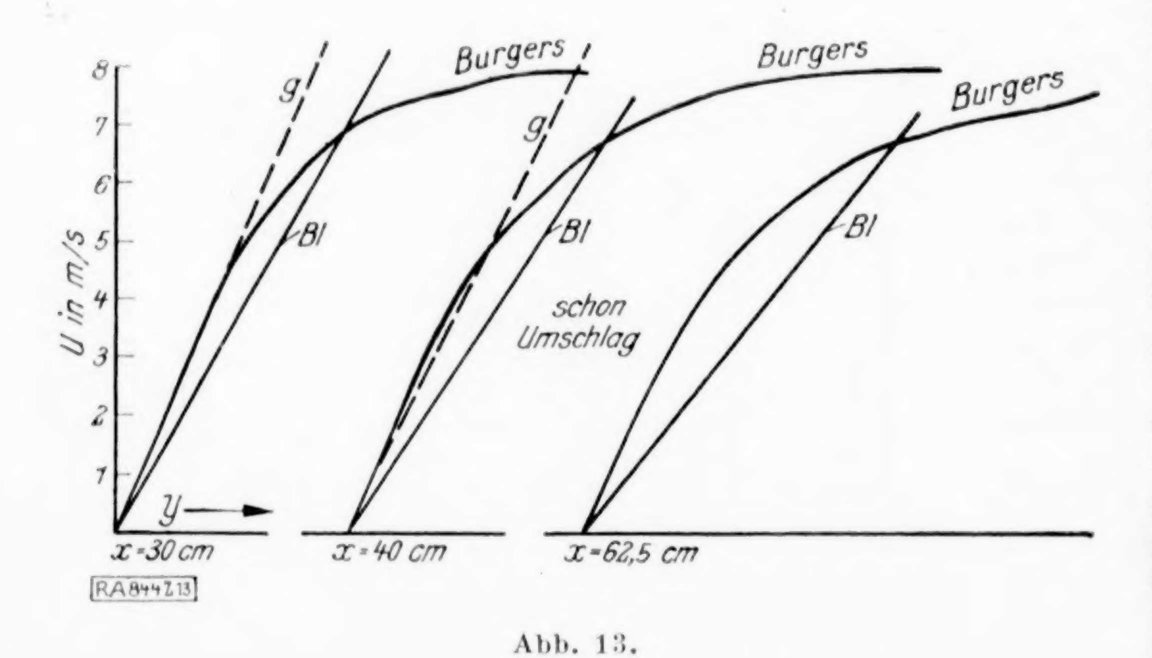



Abb. 13.

Die soeben vorgenommene Berechnung zeigt auch, daß die Ausbildung der Grenzschicht gegen verhältnismäßig geringfügige örtliche Schwankungen der Geschwindigkeit des Luftstromes längs der Platte sehr empfindlich ist, so daß solche Messungen eigentlich mit einer sehr genauen Kontrolle des statischen Druckes verbunden werden müssen. So kann auch eine wellige Gestalt der Platte auf die Ausbildung der laminaren Grenzschicht Einfluß haben.

[1]) Mededeeling No. 6, Thesis, Delft 1924, S. 39 bis 42.

4 b. Uebergang zwischen laminarem und turbulentem Strömungszustand. Wir haben bereits bemerkt, daß man der Grenzschicht eine kritische Kennzahl $R_\delta = 5{,}5\sqrt{R_x}$ zuschreiben kann, bei welcher der Uebergang vom laminaren zum turbulenten Zustand stattfindet. Ich habe $R_\delta$ nach zwei Methoden zu bestimmen versucht. Der Uebergang zeigt sich durch plötzliches Anwachsen einerseits der Grenzschicht, andererseits der Schubspannung. Van der Hegge Zynen hat $R_\delta$ bestimmt, indem er die Grenzschichtdicke auftrug. Ich habe zuerst in ähnlicher Weise (Abb. 14) die dimensionslose Größe $\delta\Big/\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$, dann aber auch die Größe $\frac{\tau_0}{U^{3/2}(\nu x)^{-1/2}}$ als Funktion der Kennzahl aufgetragen. Beide Größen müssen für eine rein laminare Grenzschicht konstant sein. Trotz der Streuung der Meßpunkte sieht man ziemlich klar einen Knick bei $R_\delta \sim 3100$. Dies Ergebnis stimmt überein mit den Delfter Messungen. Vergleicht man diesen Wert von $R_\delta$ mit der kritischen Kennzahl der Rohre oder der Ringe, so erscheint er auffallend hoch. Berücksichtigt man nämlich, daß als hydraulischer Radius in unserem Fall sinngemäß die Grenzschichtdicke zu nehmen wäre, so beträgt $R_\delta$ etwa das sechsfache des für Rohre gültigen Wertes. Es ist indessen zu beachten, daß auch bei Rohren und Ringen in sehr weitem Maße durch ruhige Zuströmung der Wert der kritischen Zahl erhöht werden kann. Im Fall der zugeschärften Platte haben wir nun eine verhältnismäßig ruhige Zuströmung. Wird sie gestört, z. B. dadurch, daß die Grenzschicht an einer abgerundeten Vorderkante eine Ablösung erfährt, so findet der Uebergang bei niedrigerer Kennzahl statt. Auch wenn der Luftstrom selbst, z. B. infolge starker Drosselung, turbulenter als beim normalen Betrieb war, fand ich, daß der Umschlag früher erfolgte. Die untere Grenze von $R_\delta$ wurde bisher nicht festgestellt. Abb. 15 und 16 geben Beispiele der Geschwindigkeitsverteilung für den Uebergangsbereich.

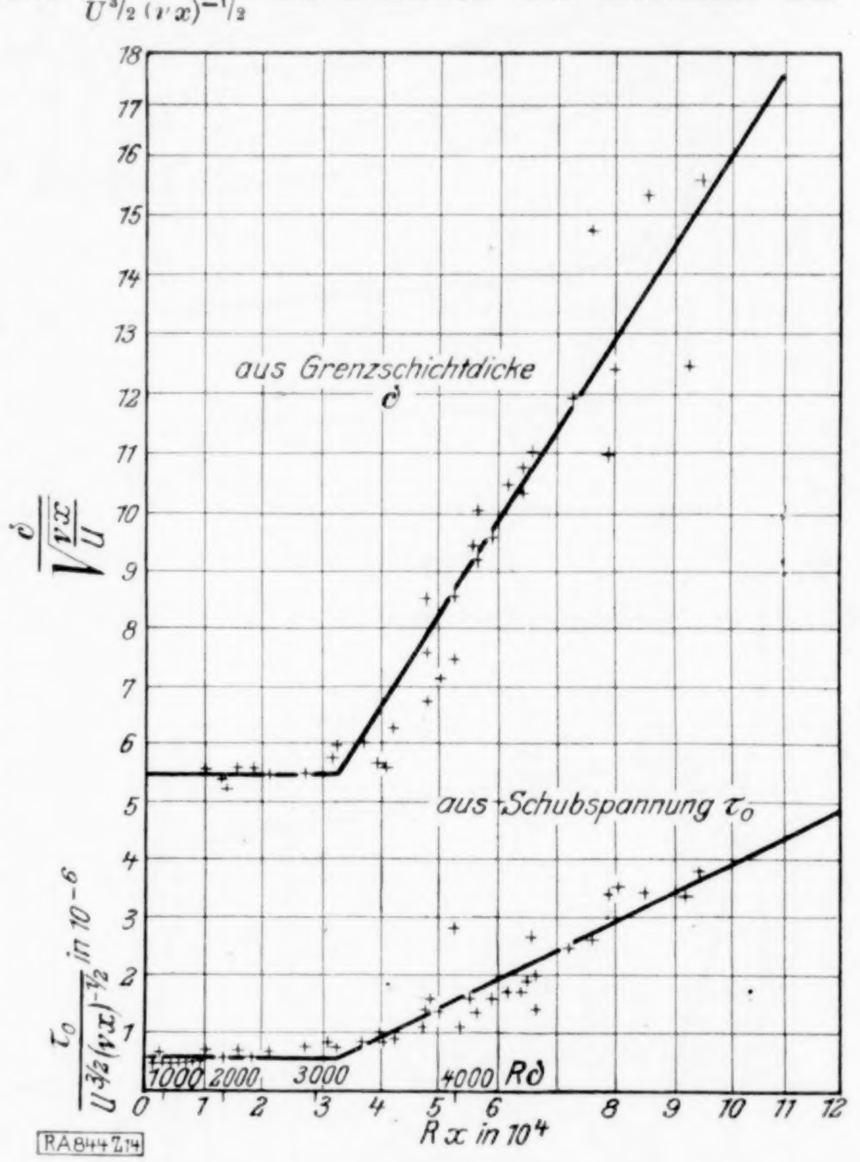


Abb. 14.

4 c 1. Turbulenter Strömungszustand an der glatten Platte. Da bei den Vorversuchen sich ergab, daß durch Abrunden der Anströmkante der Uebergang zum turbulenten Strömungszustand beschleunigt wird, so wurde an der Vorderkante der glatten Glasplatte eine runde Holzleiste angesetzt. Bei dieser Anordnung konnte schon bei $x = 10$ cm turbulente Geschwindigkeitsverteilung festgestellt werden. Die Messungen bezogen sich auf den Geschwindigkeitsbereich zwischen 16 m/s und 36 m/s. Zwischen $x = 10$ cm und $x = 50$ cm wurden die Profile von 5 zu 5 cm ausgemessen. Die jeweilige Schubspannung an der Wand wurde aus der Formel (6) bestimmt. Eine unmittelbare Bestimmung mit Hilfe des Geschwindigkeitsgefälles an der Wand konnte nicht vorgenommen werden, weil die Messung mit dem Pitotrohr in unmittelbarer Nähe nicht die genügende Genauigkeit gewährleistet.

Die Ergebnisse der Messung sind in Abb. 17 dargestellt. In Abb. 17 ist sowohl der Abstand von der Wand als auch die Geschwindigkeit in logarithmischem Maßstab aufgetragen; es zeigt sich dabei, daß, abgesehen von der unmittelbaren Wandnähe ($y < 1$ mm), die Geschwindigkeitsverteilung durch ein Potenzgesetz sich ziemlich gut annähern läßt.

In Abb. 18 ist nun das Geschwindigkeitsverhältnis $u/U$ als Funktion der Verhältniszahl $y/\delta$ ebenfalls in logarithmischem Maßstab dargestellt. Die Werte $\delta$ sind aus Abb. 17

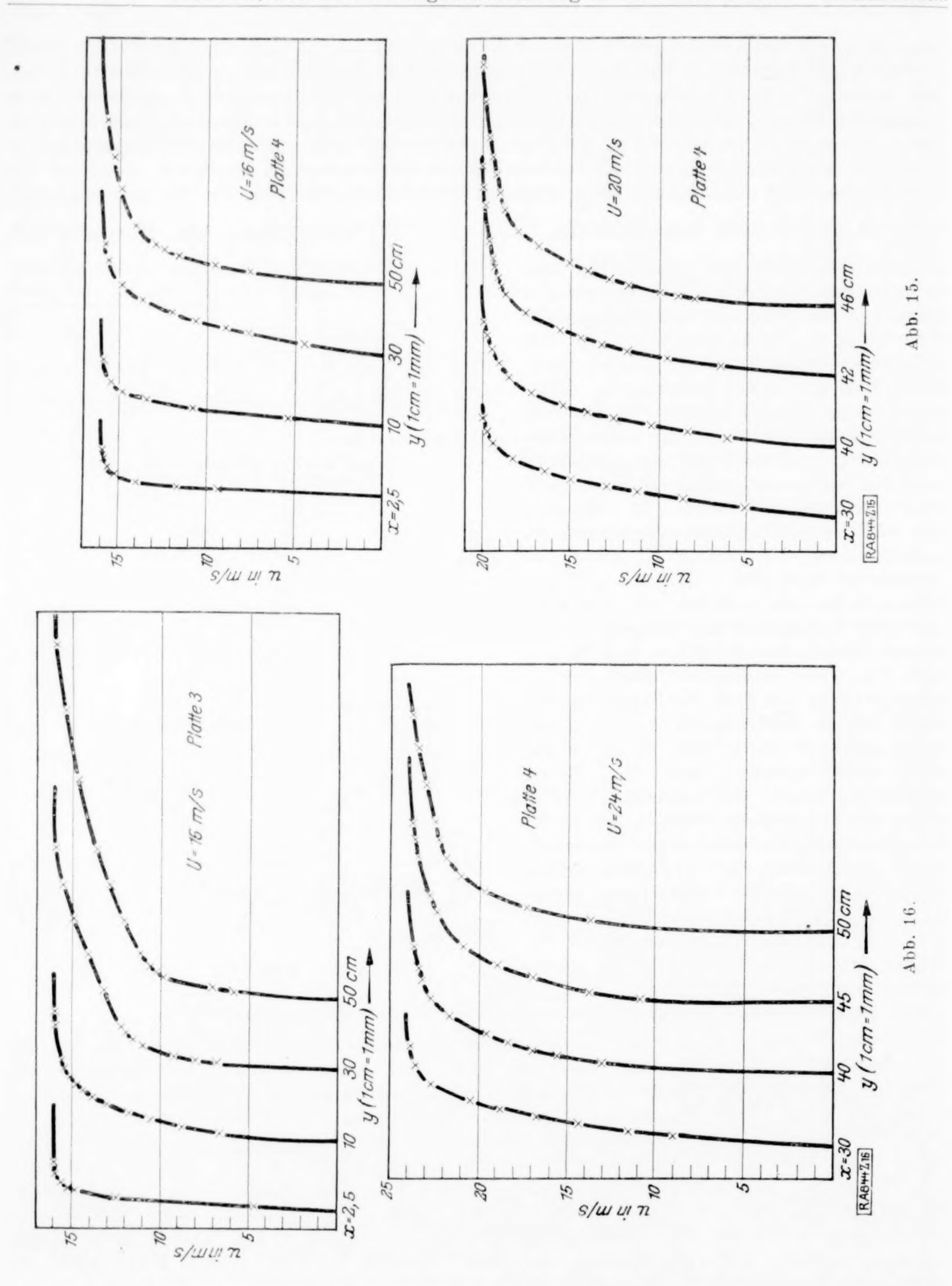



Abb. 15.

Abb. 16.

durch den Schnittpunkt der geneigten Linien mit der Horizontalen $u/U$ gewonnen worden. Mit anderen Worten: die verschiedenen $x$-Werten entsprechenden Linien wurden durch Verschiebung in horizontaler Richtung zur Deckung gebracht. Abb. 18 zeigt, daß die Neigung der Linien, d. h. der Exponent des Potenzgesetzes, etwas von der Geschwindigkeit abhängt. Setzt man

$$\frac{u}{U} = c\left(\frac{y}{\delta}\right)^n \quad (c = \text{Proportionalitätsfaktor}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

so wächst der Exponent $n$ mit der Geschwindigkeit. Man erhält z. B. für

$$U = 20 \text{ m} \quad n = 0{,}186; \qquad U = 28 \text{ m} \quad n = 0{,}196; \qquad U = 36 \text{ m} \quad n = 0{,}198.$$

Die Exponenten, die für die glatte Platte nach diesem Verfahren gewonnen worden sind, sind durchweg höher als der durch Prandtl und v. Kármán aus dem Widerstandsgesetz abgeleitete Exponent $n = {}^1/_7 = 0{,}143$. Dies liegt indessen teilweise daran, daß bei der Auswertung die Meßpunkte $y < 1$ mm weggelassen worden sind.

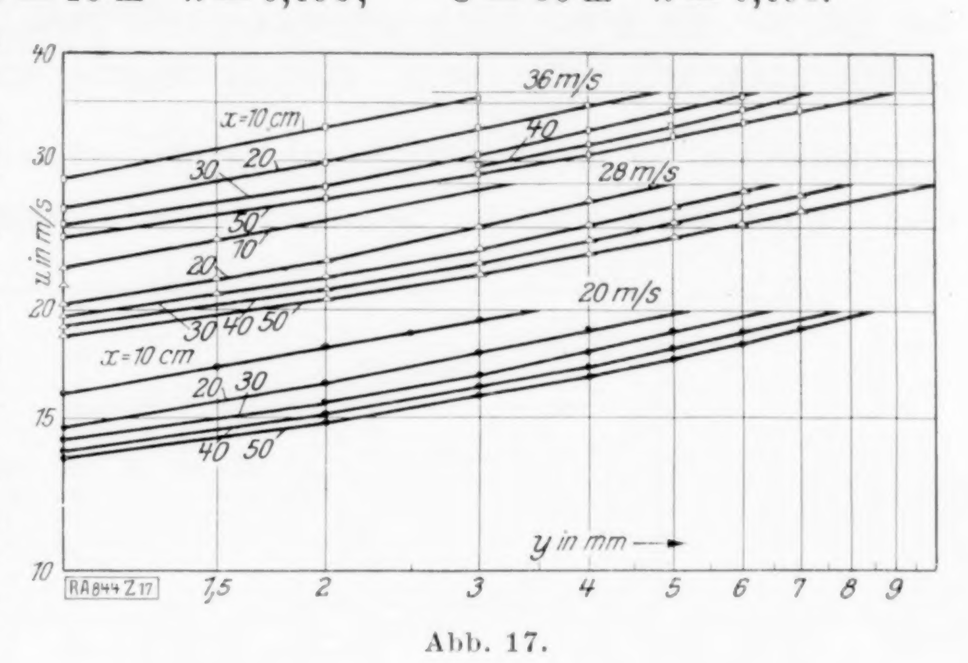



Abb. 17.

Wenn man die Geschwindigkeitsverteilung durch ein Potenzgesetz interpoliert, so kann man das Integral in Formel (6) auswerten. Führt man die Grenzschichtdicke $\delta$ in dem oben erwähnten Sinne ein, so findet man

$$\tau_0 = \frac{d\,\delta}{d\,x}\,a\,\varrho\,U^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wobei die Zahl $a$ mit dem Exponenten $n$ durch die Beziehung $a = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2\,n+1}$ zusammenhängt. Die Ermittlung der Schubspannung habe ich im allgemeinen mit Hilfe der Formel (9) vorgenommen.

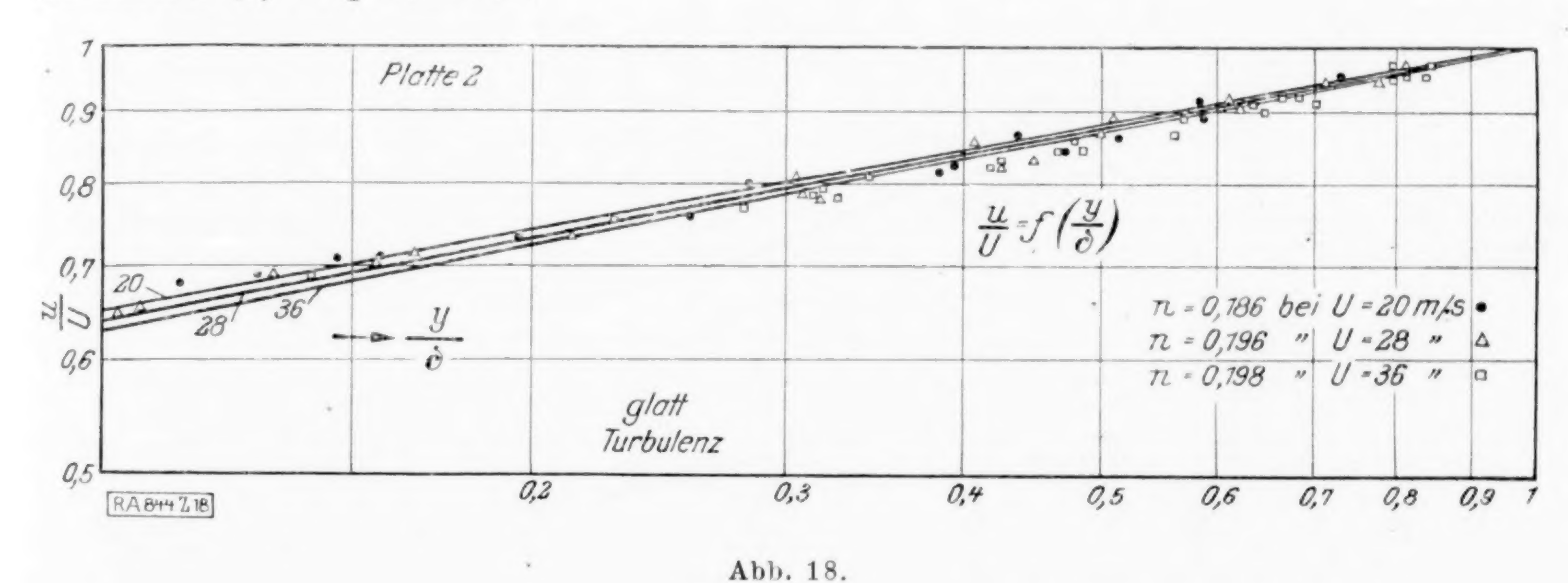



Abb. 18.

Wenn man die Annahme macht, daß zwischen Schubspannung, Abstand von der Wand und Geschwindigkeit eine eindeutige Beziehung besteht, in der nur die physikalischen Konstanten Dichte und Zähigkeit vorkommen, so kann diese Beziehung in der Form

$$\frac{\tau_0}{\varrho\,u^2} = f\left(\frac{u\,y}{\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung ist der allgemeine mathematische Ausdruck der Prandtlschen Dimensionsbetrachtung, die zu der oben (in der Einleitung) angeführten Formel für die turbulente Geschwindigkeitsverteilung führt. Die Größe $\frac{u\,y}{\nu}$ kann man als eine Art Kennzahl $R_y$ für die Stelle $y$ ansehen.

Interpoliert man die Geschwindigkeitsverteilung durch eine Potenzformel, so erhält man Gl. (10) in der Form

$$\frac{\tau_0}{\varrho\,u^2} = \zeta\left(\frac{u\,y}{\nu}\right)^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Zwischen den Exponenten $n$ und $m$ besteht offenbar die Beziehung $m = -\frac{2\,n}{n+1}$. $\zeta$ ist eine Zahl, die nun aus den Messungen ermittelt werden kann.

v. Kármán gelangt auf Grund des Blasiusschen Widerstandsgesetzes zu den Werten: $\zeta = 0{,}0225$, $m = 0{,}25$, $n = 0{,}143$. Ich habe nun zunächst das gesamte Material, das ich für die glatte Platte gewonnen habe, mit der v. Kármánschen Theorie verglichen (Abb. 19). Man sieht, daß die Punkte für kleine Werte von $\frac{u\,y}{\nu}$, etwa für $\frac{u\,y}{\nu} \leq 2000$, um die theoretische Kurve streuen, während für größere Werte eine systematische Abweichung auftritt. Dementsprechend erhält man, wenn man die Werte in

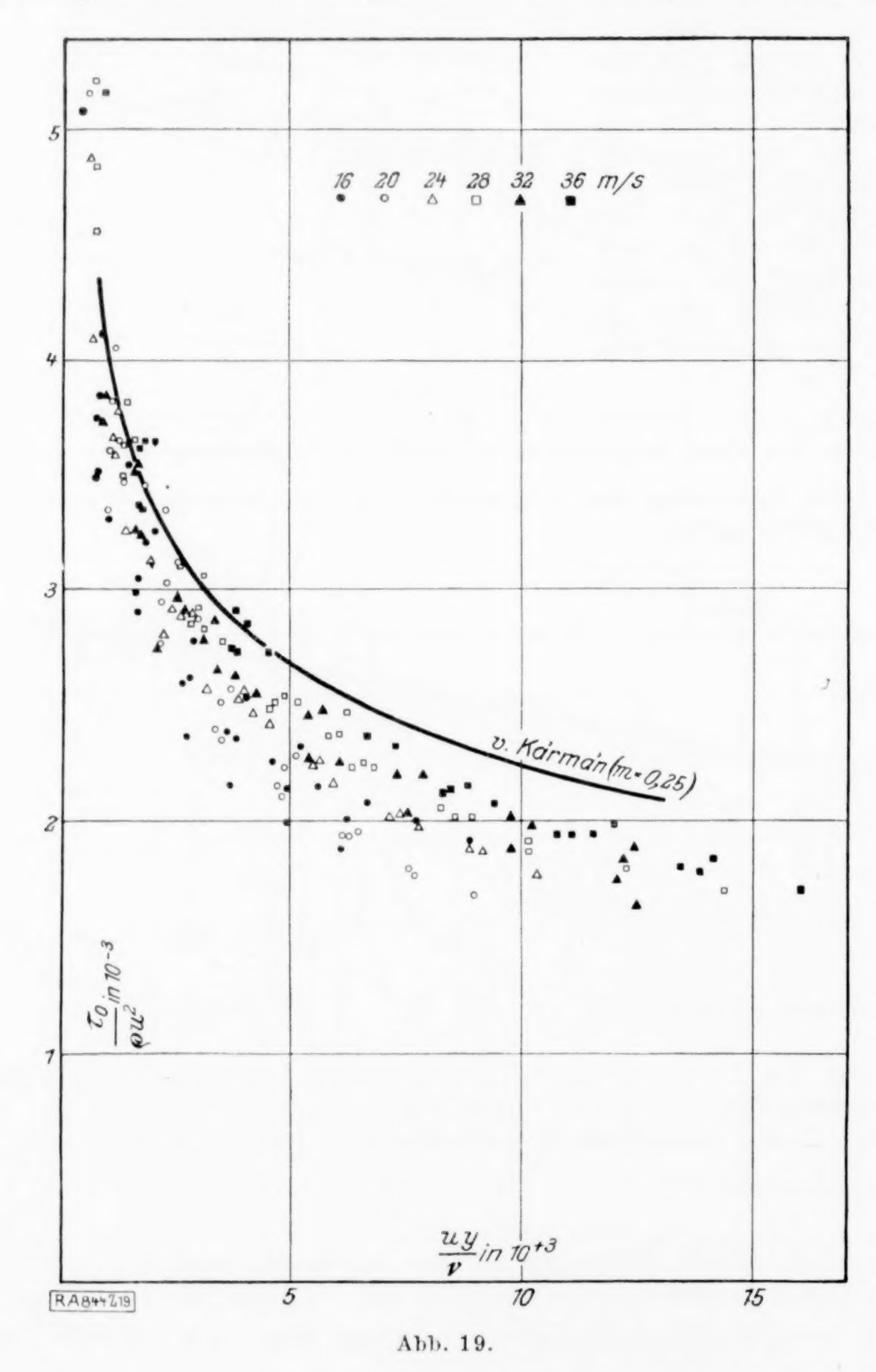



Abb. 19.

unmittelbarer Nähe der Wand wegläßt, wie ich oben erwähnte, größere Werte für $n$ als $n = 0{,}143$.

4 c 2. Turbulenter Strömungszustand an rauhen Platten. Nach den Messungen an der glatten Platte maß ich die Geschwindigkeitsverteilung an einer welligen Platte und zwei rauhen Platten. Es zeigte sich dabei, daß die Interpolation mit der Potenzformel sich auch in diesem Falle gut bewährt. Das Material wurde in derselben Weise wie bei der glatten Platte bearbeitet, vergl. Abb. 20 bis 22.

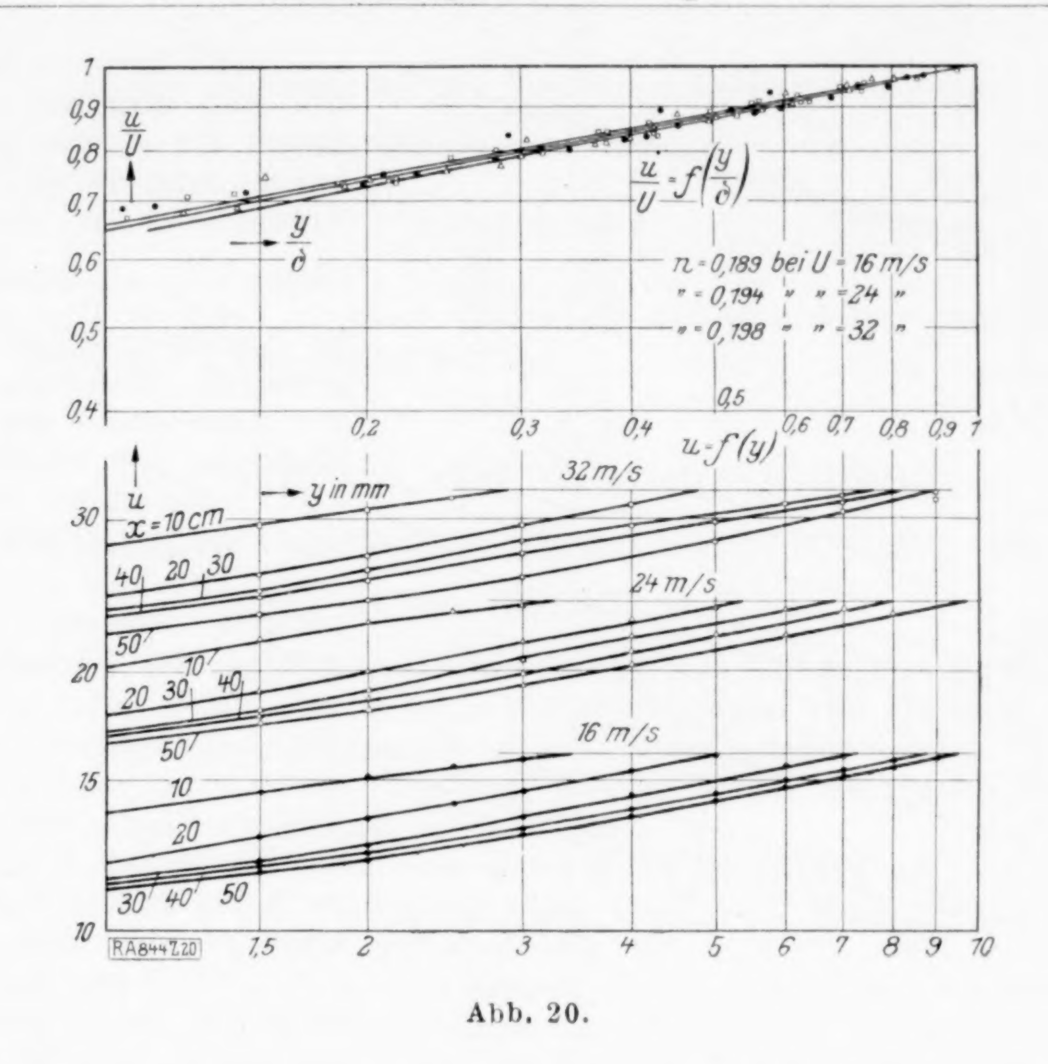



Abb. 20.

Weiterhin wurde aus dem Impulsintegral der Widerstand bzw. die Schubspannung bestimmt. Ich habe zum Vergleich das Impulsintegral einmal auf Grund der Meßpunkte, dann aber auch mit Hilfe der Formel (9) ermittelt. Bei der Platte mit der größten Rauhigkeit zeigten sich dabei größere Abweichungen, offenbar deshalb, weil die Interpolation mit Hilfe des Potenzgesetzes nicht bis zum Werte $u = U$ oder $y = \delta$ gilt, sondern die Verteilungskurve der Geschwindigkeit eine stärkere Abrundung zeigt. In diesem Falle wurde natürlich das exakte Impulsintegral zur Berechnung der Schubspannung herangezogen.

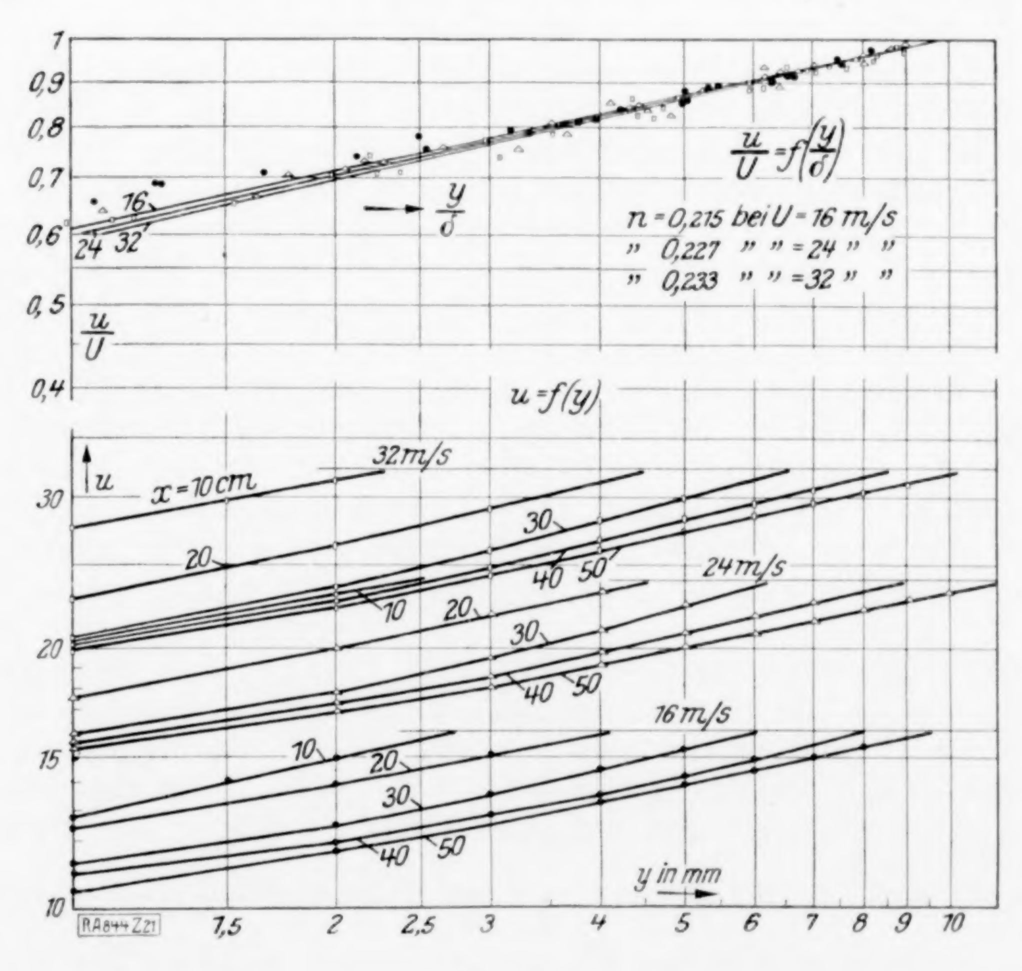



Abb. 21.

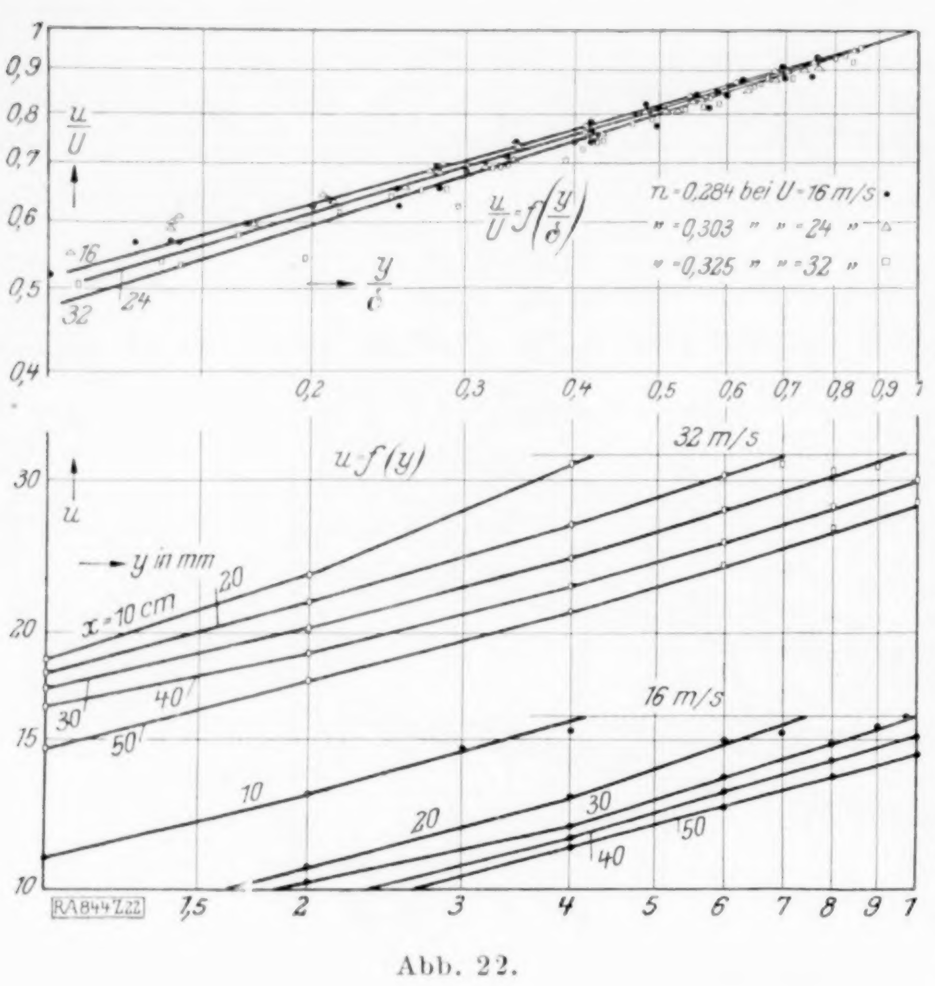


Abb. 22.

Es lag nun nahe, zu prüfen, wie weit man die Schubspannung durch die Formel (11) darstellen kann. Abb. 23 und 24 zeigen das Ergebnis. Als Ordinate ist die Größe $\frac{\tau_0}{\varrho u^2}$, als Abszisse $\frac{u y}{\nu}$, beide im logarithmischen Maßstab, aufgetragen. Man sieht zunächst, daß der Absolutwert des Exponenten $m$ einerseits mit wachsender Rauhigkeit, andererseits mit wachsender Geschwindigkeit zunimmt.

Die Zahl $\zeta$ variiert für das gesamte Material zwischen 0,03 und 0,6, der Exponent $m$ zwischen — 0,3 und — 0,5 und entsprechend der Exponent $n$ zwischen 0,186 und 0,325. Ich habe nun die merkwürdige Beobachtung gemacht, daß die Werte von $\zeta$ als Funktion von $n$ im logarithmischen Maßstabe auf einer geraden Linie liegen.

Die grundsätzliche Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse ist meiner Ansicht nach die, daß anscheinend eine eindeutige Beziehung zwischen dem Exponenten der Geschwindigkeitsverteilung und dem Beiwert $\zeta$ besteht. $\zeta$ entspricht dem Beiwert, den die Theorie für den Idealfall der glatten Platte als konstant voraussetzt; nur sind für rauhe Platten sowohl die Größe $\zeta$ als auch der Exponent $m$ keine Konstanten mehr, sondern sie hängen außer von der Rauhigkeit auch von der Geschwindigkeit ab. Man kann ver-

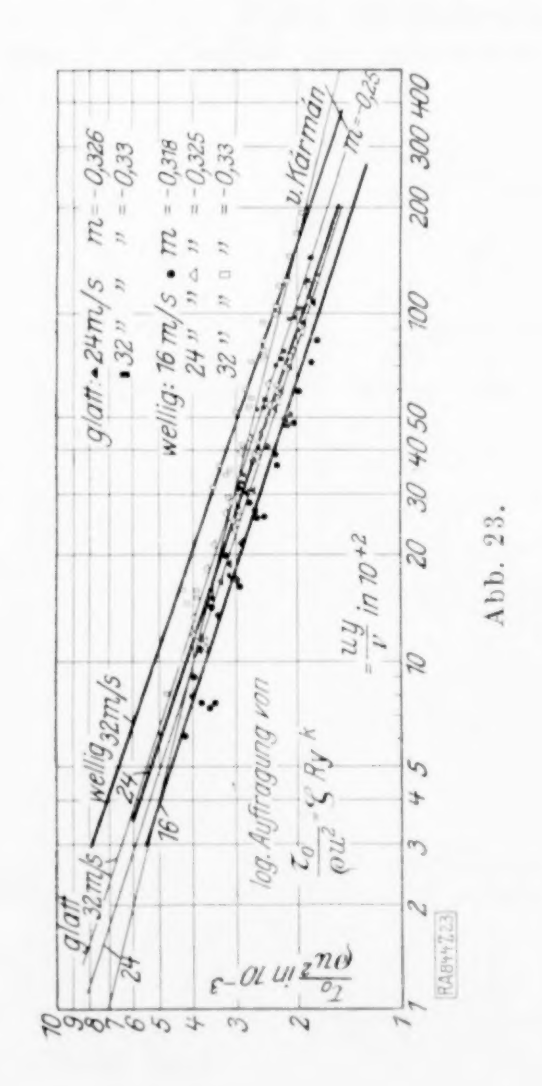


Abb. 23.

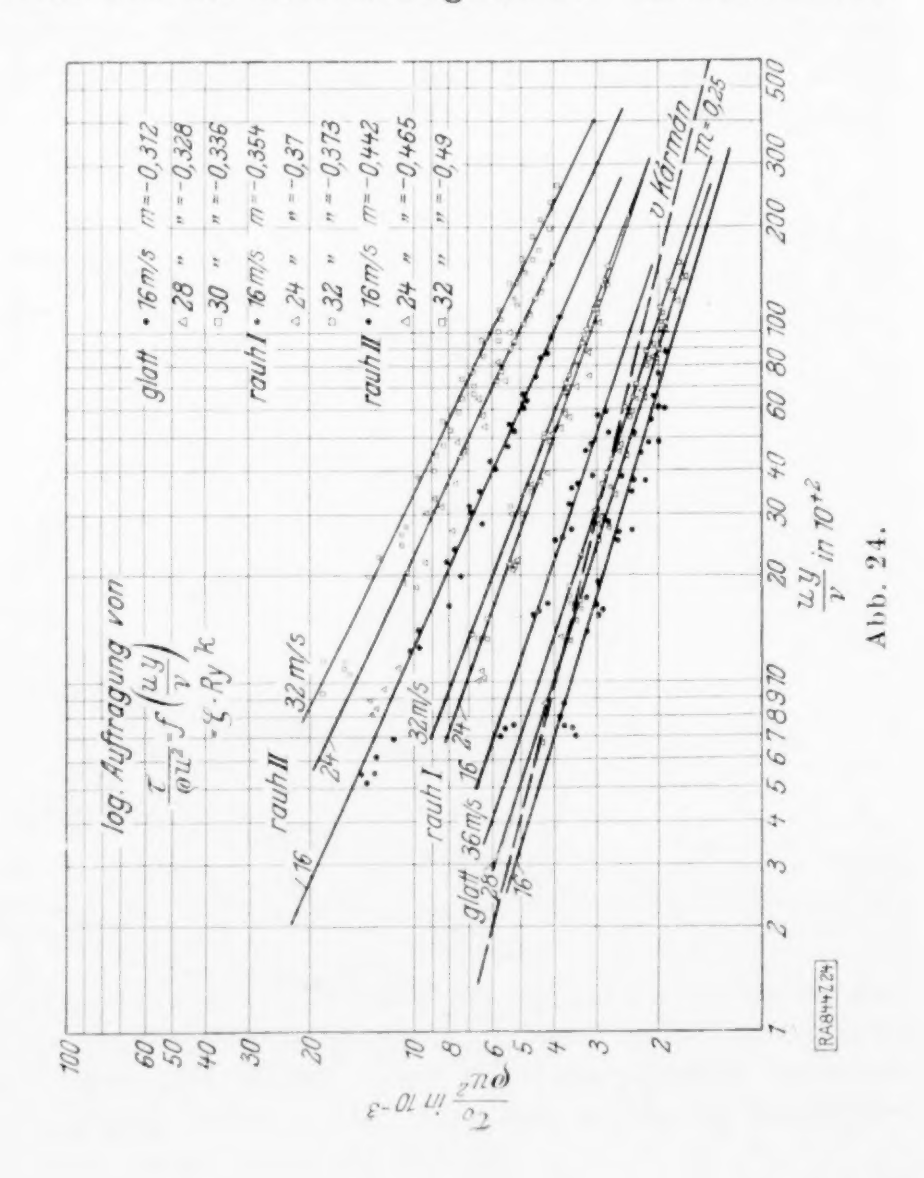


Abb. 24.

muten, daß beide von der dimensionslosen Größe $\frac{u\,\varkappa}{\nu}$ abhängen ($\varkappa$ = mittlere Rauhigkeitserhebung). Das allgemeine Widerstandsgesetz würde dann die Form erhalten:

$$\frac{\tau_0}{\varrho\, u^2} = \left(\frac{u\, y}{\nu}\right)^{m\left(\frac{u\,\varkappa}{\nu}\right)} \cdot \zeta\left(\frac{u\,\varkappa}{\nu}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Es muß dahingestellt bleiben, ob diese Gleichung nur eine Interpolationsformel darstellt oder aber eine Gesetzmäßigkeit ausdrückt. 844

# Der Einfluß der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen.

Von **WALTER FRITSCH** in Aachen.

Während über den Druckabfall in rauhen Rohren und Rinnen eine Reihe von Versuchen vorliegt, wie z. B. die ausführlichen Untersuchungen von Hopf und Fromm[1]), ist die Geschwindigkeitsverteilung über den Strömungsquerschnitt bis jetzt nur bei glatten Rohren untersucht worden. Das Ziel meiner Arbeit war, auch für rauhwandige Rinnen die Geschwindigkeitsverteilung zu ermitteln.

Die Auswahl des Versuchsmaterials geschah in Anlehnung an die Arbeit von Hopf und Fromm; auf Grund ihrer Messungen kann man nach Hopf bezüglich des Widerstandsgesetzes drei typische Fälle unterscheiden, je nachdem der Reibungswiderstand langsamer als das Quadrat der Geschwindigkeit, ihm proportional, oder schneller wächst. Der erste Fall liegt bei glatter und welliger Oberfläche vor, der zweite bei rauher und der dritte bei zackiger Oberfläche. Ich untersuchte Rinnen mit Rauhigkeiten ähnlich denen, die Fromm verwandt hat.

Außer an rauhen Rinnen wurden auch Messungen an glatten ausgeführt, um das vorhandene Material zu bereichern und den Anschluß an die Messungen an rauhen Rinnen herzustellen.

**1. Versuchsanordnung.** Die Versuche fanden statt im Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule zu Aachen. Die erforderlichen Mittel wurden von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt.

Als Flüssigkeit wurde Wasser verwandt, das aus der städtischen Leitung entnommen und zunächst in einem Hochbehälter gesammelt wurde (Abb. 1); die Wassermenge ließ sich bis auf 14 l/s steigern. In dem Hochbehälter war eine Querwand angebracht, die als Ueberlauf diente, so daß bei Wasserüberschuß stets gleiche Wasserhöhe über dem Versuchsrohr gesichert war. Aus dem Hochbehälter gelangte das Wasser über einen Regulierhahn und einen kleinen Windkessel zunächst in einen Beruhigungskessel, in dem mitgerissene Luft sich ausscheiden konnte. Hierzu war ein Entlüftungsrohr (aus Glas) auf dem Beruhigungskessel angebracht. (Es zeigte sich übrigens, daß, sobald Beharrungszustand eingetreten war, nur sehr wenig Luft von dem Wasser mitgeführt wurde, die dann in größeren Luftblasen durch das Entlüftungsrohr entwich.) Der Beruhigungskessel verjüngte sich an der Wasseraustrittseite konisch bis zu einem Querschnitt von 155 × 35 mm, an den dann die eigentliche Versuchsrinne angeschlossen wurde. Aus dieser strömte das Wasser zunächst wieder in ein Beruhigungsgefäß und dann durch eine Gleichlaufrinne[2]) in ein Ponceletgefäß zur Wassermengenmessung mittels Düsen. Um den Zufluß zu dem Ponceletgefäß möglichst gleichmäßig und ruhig zu gestalten, war oben in dem Gefäß ein kräftiges Sieb angebracht, das das Wasser erst über die ganze Gefäßoberfläche verteilte, ehe es durchfloß.

Die Versuchsrinne (Abb. 2) hatte rechteckigen Querschnitt und war 2000 mm lang und etwa 150 mm breit; ihre Höhe konnte zwischen 10 und 35 mm verändert werden; hierzu waren sauber vierkantgehobelte Eisenschienen vorgesehen, je zwei von 10, 15 und 25 mm Stärke und 2000 mm Länge. Die Abdichtung erfolgte bei glatten Platten durch glatte Gummistreifen von 1 oder 1,5 mm Dicke; bei den »rauhen« Platten bewährten sich

[1]) Abhandlungen des Aerodynamischen Instituts Aachen, Heft 2, diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 329 bis 358.

[2]) Eine Rinne mit mehreren Längsrippen, die die seitlichen Wasserbewegungen fast gänzlich zum Verschwinden bringen.

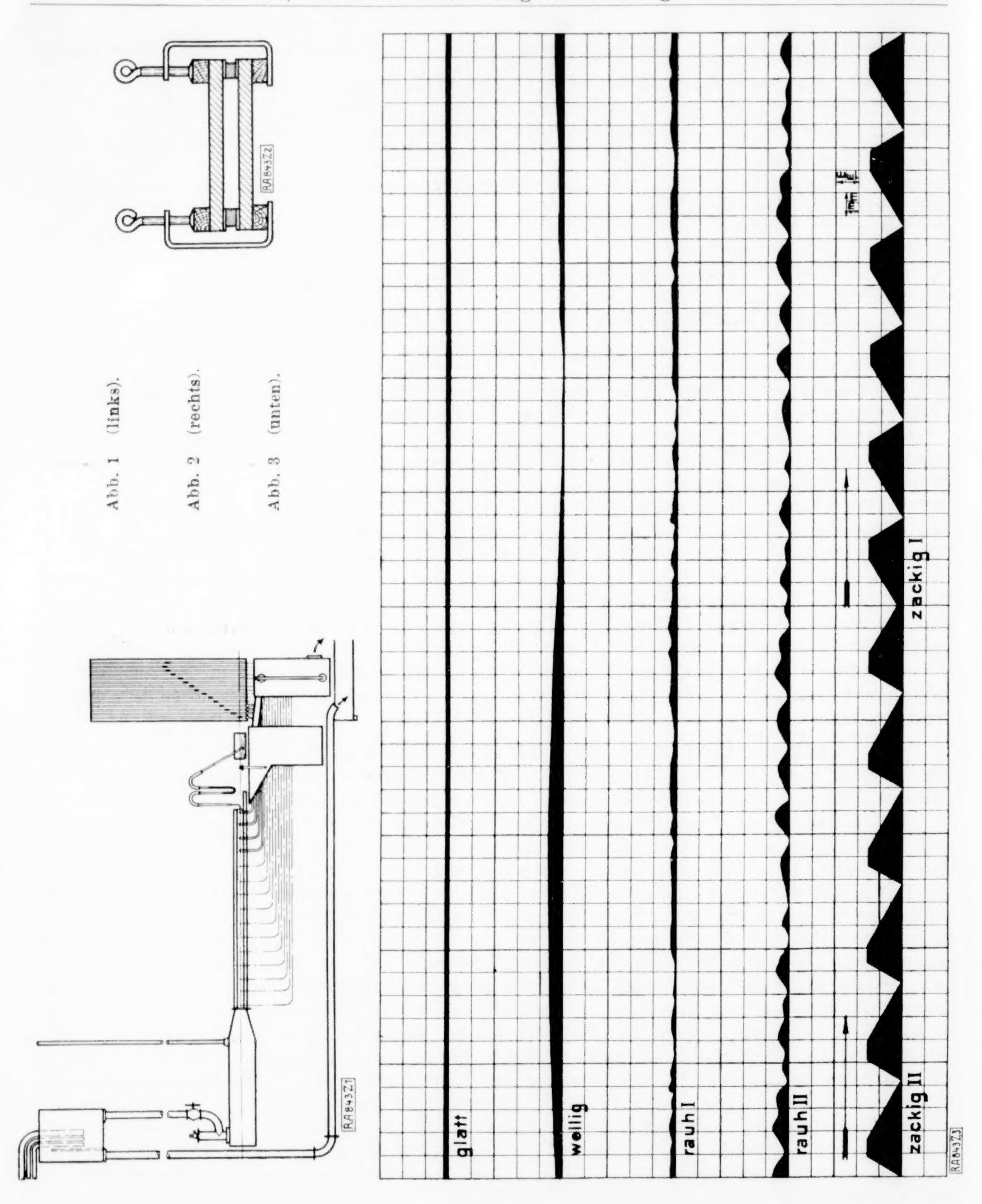



Abb. 1 (links).
Abb. 2 (rechts).
Abb. 3 (unten).

Schaumgummistreifen als ein sehr gutes Dichtungsmittel; sie konnten freilich nur einmal gebraucht werden. Etwa noch auftretende Undichtigkeiten und vor allem der Uebergang zwischen Beruhigungskessel und Versuchsrohr wurden mit Paraffin abgedichtet. Paraffin eignet sich vorzüglich als Dichtungsmittel, wenn der zu dichtende Körper ganz trocken ist. Dies wurde mittels eines »Föhn«-Trockenapparates erreicht.

Es wurden folgende Platten benutzt (Abb. 3):

1. glatt. Geschliffene Spiegelglasscheiben von 20 mm Stärke. Zu beachten ist, daß solche Spiegelglasscheiben keineswegs absolut eben sind, sondern, durch

die fabrikatorische Herstellung bedingt, leicht konvex ausfallen. Die elastische Nachgiebigkeit solcher Scheiben ist aber so groß, daß sie sich in die gewünschte Form biegen lassen.

2. wellig. Fußboden-Glasplatten mit leichten Wellen, die den Platten ein schlierenartiges Aussehen verleihen; Plattenstärke 15 mm; Wellenhöhe maximal 0,77 mm, im Mittel rund 0,5 mm; Wellenberge rund 30 bis 50 mm voneinander entfernt.
3. rauh I. Fußboden-Glasplatten auf Sand gegossen und ausgewalzt. (Der Sand drückt sich dadurch in dem Glase ab; eine Anzahl Sandkörner backen dabei fest und sitzen dann in der Oberfläche des Glases.) Stärke 20 mm; Wellenhöhe maximal 0,34 mm, im Mittel rund 0,25 mm; Abstand der Wellenberge 1 bis 3 mm.
4. rauh II. Gewöhnliches Riffelglas, wie es für Blindfenster verwendet wird. Wellenhöhe maximal 0,77 mm, im Mittel 0,50 mm; Abstand der Wellenberge 1,5 bis 3 mm.

5. und 6. zackig (von Fromm mit »Sägeprofil« bezeichnet). Ein mit der Fräsmaschine ausgenutetes Zinkblech, das schon von Fromm für seine Versuche benutzt wurde (1921); Form: sägeartig, scharfkantig; das übrige sagt Abb. 3. Da aber bei dieser Rinne die Strömungsrichtung (ob gegen die Zacken oder mit den Zacken) eine große Rolle spielt (der Widerstand ist in ersterem Falle etwa doppelt so groß), mußte hier dementsprechend noch ein Unterschied gemacht werden; es ist darum bei Strömung mit den Zacken der Rauhigkeitsgrad mit »zackig I«, gegen die Zacken mit »zackig II« bezeichnet.

Um eine einseitige Ablenkung des Austrittsstrahls durch die Schwere zu vermeiden, wurde die untere Platte stets 100 bis 150 mm länger gelassen als die obere Platte, d. h. also: Gesamtlänge der Unterplatte 2150 mm.

Im Gegensatz zu Fromm, der seine Rinne zusammenschraubte, wurden hier die Platten mit den Schienen durch kleine Eisenzwingen zusammengehalten, die im Abstande von rund 200 mm beiderseitig angebracht waren (Abb. 2) und mit denen durch verschieden starkes Anziehen eine der Länge nach konstante Rinnenhöhe eingestellt werden konnte. Hierbei wurde unter der Annahme, daß der Druckabfall (die Einlaufstrecke nicht mit einbegriffen) geradlinig ist, folgendermaßen verfahren: Mit Hilfe eines Stichmaßes wurde die Rinnenhöhe am Ausfluß und etwa 1500 mm vorher in Uebereinstimmung gebracht. Danach wurden alle zwischenliegenden Zwingen lediglich so stark angezogen, bis die Drücke der zugehörigen Meßstellen sich auf einer geraden Linie einstellten. Ging man derartig bei der glatten Rinne vor, so war die Rinnenhöhe über diesen Bereich innerhalb der meßbaren Genauigkeit parallel. Der Wert dieser Einstellmethode liegt jedoch weniger in der bequemeren und rascheren Ausrichtungsmöglichkeit, als darin, daß bei den rauhen Glasplatten ebenso verfahren werden konnte; denn hier stößt die geometrische Abstandsbestimmung der beiden rauhen Flächen voneinander auf große Schwierigkeiten, um nicht zu sagen, sie ist praktisch undurchführbar (ausgenommen das Sägeprofil, bei dem die Form geometrisch bestimmt ist).

Gemessen wurden:

Druckabfall entlang des ganzen Versuchsrohres (statische Druckverteilung),
Staudruck am Ausfluß, und zwar in der Mitte des Rohres parallel zur kurzen Seite über die ganze Rinnenhöhe,
Temperatur und Durchflußmenge.

Um den Druckabfall zu ermitteln, war jedesmal eine der zueinander gehörenden Schienenpaare (10, 15, 25 mm) mit seitlichen Anbohrungen versehen, die möglichst sauber hergestellt waren. Da die kleinste Ungenauigkeit einer solchen Anbohrung, ein Grat, etwas Rost oder Schmutz genügt, um das Meßergebnis fühlbar zu beeinflussen, waren über die ganze Schienenlänge (2000 mm) 19 Bohrungen (1,5 bis 2,0 mm Dmr.) verteilt, von denen 12 bis 15, wenn man die »Einlaufstrecke« abrechnet, zur Bestimmung des Druckabfalls in Frage kamen. Auf diese Weise dürfte man wohl gute Mittelwerte erhalten haben. Die Bohrungen waren mittels Gummischläuchen mit Glasrohren von 15 mm lichter Weite verbunden, hinter denen eine Skala mit Millimetereinteilung angebracht war (siehe Abb. 1). Vor jedem Versuch wurden die Bohrungen mit gewöhnlichen Pfeifenreinigern von Schmutz oder Rost sorgfältig gereinigt.

Zur Ermittelung der Geschwindigkeitsverteilung, der Hauptaufgabe dieser Arbeit, wurde der Staudruck am Ausflußquerschnitt gemessen. Da eine Rückwirkung der

Strahlablenkung nach dem Ausfluß auf die Geschwindigkeitsverteilung besteht, wurden die Messungen des Staudrucks stets innerhalb der Rinne, etwa 10 mm vom Ausfluß entfernt, vorgenommen. Versuche, die 35 mm innerhalb der Rinne gemacht wurden, ergaben, daß rund 10 mm völlig genügen, um symmetrische und einwandfreie Profile zu erhalten.

Die Messung erfolgte mit gezogenen Glasröhrchen von 0,3 bis 0,4 mm Außendurchmesser und 0,2 bis 0,3 mm Innendurchmesser an der Spitze. Aus Festigkeitsgründen waren sie leicht konisch gehalten. Der horizontale, in der Strömung befindliche Teil war etwa 30 mm lang, so daß der Schaft rund 20 mm hinter dem Ausflußquerschnitt lag (s. Abb. 4). Die Notwendigkeit hierzu ergab sich aus den Vorversuchen (siehe diese). Die Spitze des gläsernen Meßröhrchens wurde auf einem weichen Abziehstein sauber abgeschliffen und dann unter dem Mikroskop kontrolliert und gemessen. Bei den Messungen kommt es sehr darauf an, die Entfernung der Meßstellen, d. h. der Rohrspitze von der Wand festzustellen. Hierzu wurde folgender Weg eingeschlagen: Das Röhrchen wurde absichtlich etwa 3 bis 4° schräg nach oben gebogen (s. Abb. 4). Schiefstellungen bis zu 10° gegen die Strömungsrichtung ergaben keinen nennenswerten Fehler. Vor jedem Versuch wurde dann die elastische Röhrchenspitze gegen die obere Wand der Rinne gedrückt. Danach wurden die Wasserhähne geöffnet und der Beharrungszustand abgewartet, was in 10 bis 15 min der Fall war. Bewegte man nun das Meßröhrchen langsam gegen

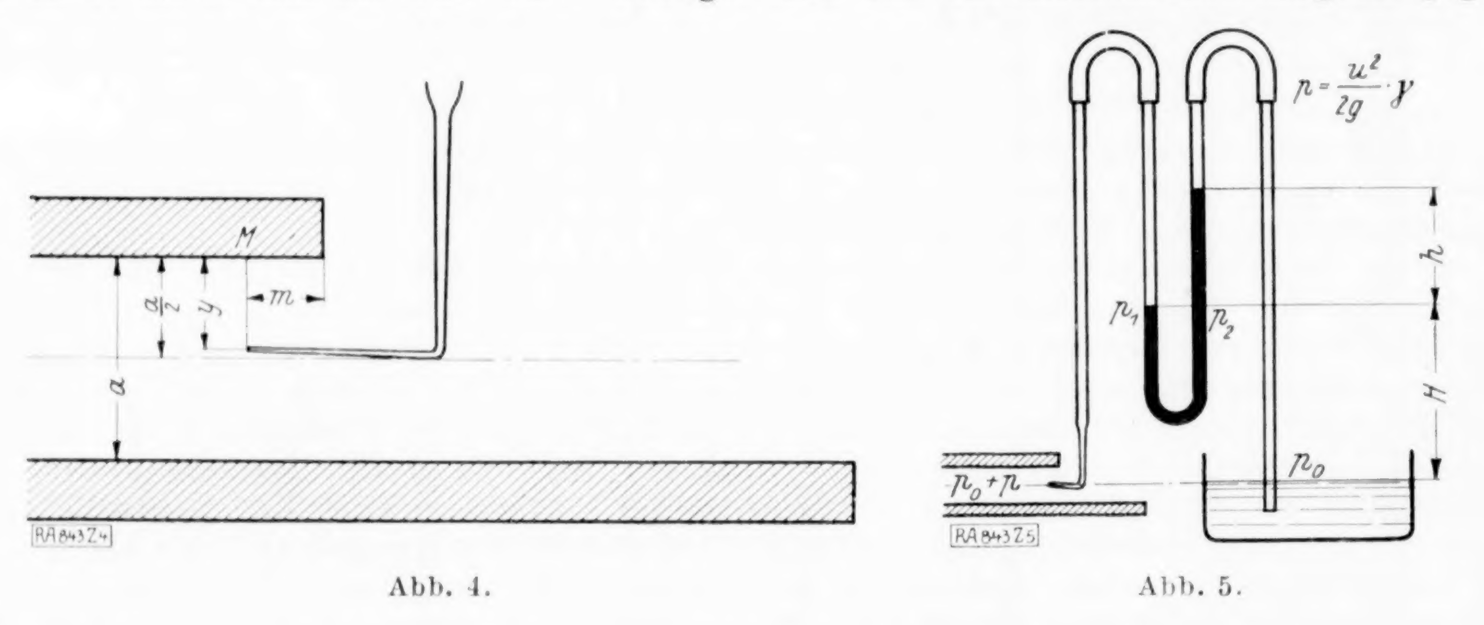



Abb. 4. Abb. 5.

die Rohrmitte zu, so zeigte sich der Augenblick, wo sich die Röhrchenspitze von der Wand löste, also Röhrchenmitte noch genau $^1/_2$ Röhrchendurchmesser von der Wand entfernt war, sehr deutlich durch plötzliches Anwachsen des Staudruckes im Manometer. Damit war aber auch für jeden weiteren Meßpunkt seine geometrische Lage einwandfrei festlegbar. Die Verschiebung des Meßröhrchens erfolgte mittels flachgängiger Schraube[1]) [Ganghöhe 4,233 mm (6 Gänge auf 1 engl. Zoll)], die durch ein Handrad angetrieben wurde. Das Handrad war noch 16 fach unterteilt; Drehung um einen Teilstrich bedeutete also eine Verschiebung des Meßröhrchens um 0,264 mm. Der Staudruck wurde auf ein Quecksilbermanometer (Ablesungsgenauigkeit 0,1 mm) übertragen, dessen zweiter Schenkel wiederum mit einem Wassergefäß verbunden war (Abb. 5); dieses zweite Gefäß hatte eine sehr große Oberfläche, die in gleicher Höhe mit der Versuchsrohrmitte lag. Auf diese Weise wurde der verschiedene statische Druck bei Messungen oberhalb bzw. unterhalb Rohrmitte selbsttätig ausgeglichen, da von einer Aenderung der Höhenlage des Wasserspiegels im Ausgleichgefäß praktisch keine Rede sein konnte.

Die Temperatur wurde in dem Beruhigungsgefäß hinter dem Versuchsrohr durch ein Thermometer mit Ein-Zehntel-Grad-Skaleneinteilung gemessen. Sie änderte sich innerhalb der ersten Viertelstunde etwa um 1° C, um dann während des ganzen Versuchs höchstens noch um ein bis zwei Zehntelgrad zu schwanken. Für die Rechnung wurde der Mittelwert genommen.

Die Wassermengenbestimmung (Durchflußmenge) erfolgte mit Hilfe eines Poncelet-gefäßes. Der größte Wert der Wasserhöhe über Düsenmitte betrug 620 mm. Meist arbeiteten daher zwei gleich große Düsen zusammen; es standen fünf Düsenpaare von 45, 50, 55, 60 und 65 mm Dmr. zur Verfügung. Man erhält dann einen Meßbereich

[1]) Reitstock einer ausrangierten kleinen Drehbank.

von 2 l/s (1 Düse von 45 mm bei 220 mm Wasserhöhe) bis 14 l/s (2 Düsen von 65 mm bei 610 mm Wasserhöhe). Die Düsen wurden für die einzelnen Versuche möglichst so gewählt, daß der Wasserstand wenigstens über 400 mm betrug. Die Fehlergrenzen dieser Mengenmessung mittels scharfkantiger Durchflußdüsen liegen innerhalb 1/2 vH.

**2. Vorversuche.** Zunächst waren noch einige Fehlerquellen nach Möglichkeit auszumerzen. Bei den ersten Rinnen, bei denen Oberplatte und Unterplatte sowie die Seitenschienen gleichmäßig abschlossen, d. h. alle genau 2000 mm lang waren, zeigte sich, daß das Geschwindigkeitsprofil unsymmetrisch ausfiel; dies trat besonders stark hervor bei verhältnismäßig großer Rinnenhöhe (30 mm) und kleinen Geschwindigkeiten (1 bis 2 m/s). Nachdem dann die Unterplatte etwa 150 mm länger gelassen wurde, konnte man die Profile innerhalb der Meßgenauigkeit als symmetrisch ansprechen.

In der Weise, wie schon Nikuradse[1]) seine Messungen machte, wurde bei den ersten Versuchen der Staudruck in bzw. 1 mm hinter der Ausflußebene aufgenommen. Diese Methode ist für die Verhältnisse, die bei Nikuradse vorlagen, nicht zu beanstanden. Bei den hier zu erörternden Messungen ändert sich das Bild aber wesentlich. Die Geschwindigkeiten betragen (für den langsamsten Fall) nur ein Zehntel der in den Versuchen von Nikuradse (1,2 m/s gegen 12 m/s) auftretenden. Vor allem machte sich die Wandrauhigkeit gerade am Ausfluß besonders bemerkbar, so daß die aufgenommenen Geschwindigkeitsprofile sehr starke Unregelmäßigkeiten, besonders in der Wandnähe, aufwiesen. Die weiteren Messungen wurden darum innerhalb der Versuchsrinne vorgenommen, und zwar mindestens 10 mm vor Ausfluß.

Bei den ersten Messungen nahm der statische Druck im ganzen Versuchsrohr im Laufe des Versuches zu, wobei der Druckabfall jedoch der gleiche blieb. Die nähere Untersuchung ergab, daß der Schaft des Staudruck-Meßröhrchens, wenn dieses bei fortschreitender Messung von oben nach unten bewegt wurde, den Ausflußquerschnitt etwas versperrte. Obwohl diese Versperrung maximal kaum mehr als 0,5 vH des ganzen Ausflußquerschnittes betrug, machte sie sich doch sehr deutlich geltend. Es lag damit die Gefahr nahe, daß die Verhältnisse am Ausfluß auch noch weitergehend gestört waren. Deshalb wurde ein Meßröhrchen hergestellt, bei dem sich der Schaft mindestens 20 mm hinter der Ausflußöffnung befand. Bei diesem Meßröhrchen zeigte sich dann eine derartige Druckzunahme fast nicht mehr.

Die Schwierigkeiten, die Wände der Versuchsrinne genau parallel einzustellen, wurden schon erwähnt. Da nach den Arbeiten von Dönch der starke Einfluß bereits recht geringer Abweichungen bekannt war, interessierte es besonders für diesen speziellen Fall, die Größenwerte der Fehlmessungen bei schlecht aufgebauter Rinne zu kennen. Zu diesem Zwecke wurden an einer Rinne (glatt) zunächst nach exakter Ausrichtung Druckabfall und Geschwindigkeitsverteilung gemessen, dann unter sonst gleichen Umständen bei sich verengendem Ausfluß und ebenso bei sich erweiterndem Ausfluß diese Werte aufgenommen. Das Ergebnis, das auch sehr gut mit den Versuchen von Dönch[2]) in Einklang steht, war, daß Querschnittsverengung die Geschwindigkeitsverteilung recht empfindlich beeinflußt, während Querschnittserweiterung wesentlich geringere Wirkung ausübt.

Die zur Höhe verhältnismäßig große Breite (Seitenverhältnis bei kleiner Rinnenhöhe etwa 1 : 12, bei großer Rinnenhöhe etwa 1 : 5,5) wurde bei den Versuchen gewählt, um in der Mitte zweidimensionale Strömung annehmen zu können. Bei den rauhen Platten kommt noch hinzu, daß die Seitenwände doch glatt bleiben, also der Flüssigkeit geringeren Widerstand bieten. Inwieweit nun diese Auffassung berechtigt ist, sollte durch Aufnahme der Geschwindigkeitsverteilung über die ganze Rinnenbreite, und zwar bei einer glatten und einer rauhen (rauh II) Rinne nachgeprüft werden. Die Meßergebnisse sind in den Abb. 6 bis 13 wiedergegeben. Für die glatte Rinne, bei der die Seitenwände von gleicher Beschaffenheit sind, vielleicht sogar etwas rauher (Eisen), weist ziemlich genau die mittlere Hälfte der Rinnenbreite symmetrische Verteilung auf. Jedoch bei der rauhen Rinne ist der parallele mittlere Teil nicht, wie man vielleicht erwarten könnte, noch beträchtlich breiter, sondern zeigt ungefähr gleiches Verhältnis. Immerhin weist die halbe Rinnenbreite Verhältnisse von sehr angenähert zweidimensionalem Charakter auf.

[1]) Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen, VDI-Forschungsarbeiten, Heft 281.

[2]) Dönch, Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Oeffnungswinkeln, VDI-Forschungsarbeiten, Heft 282.

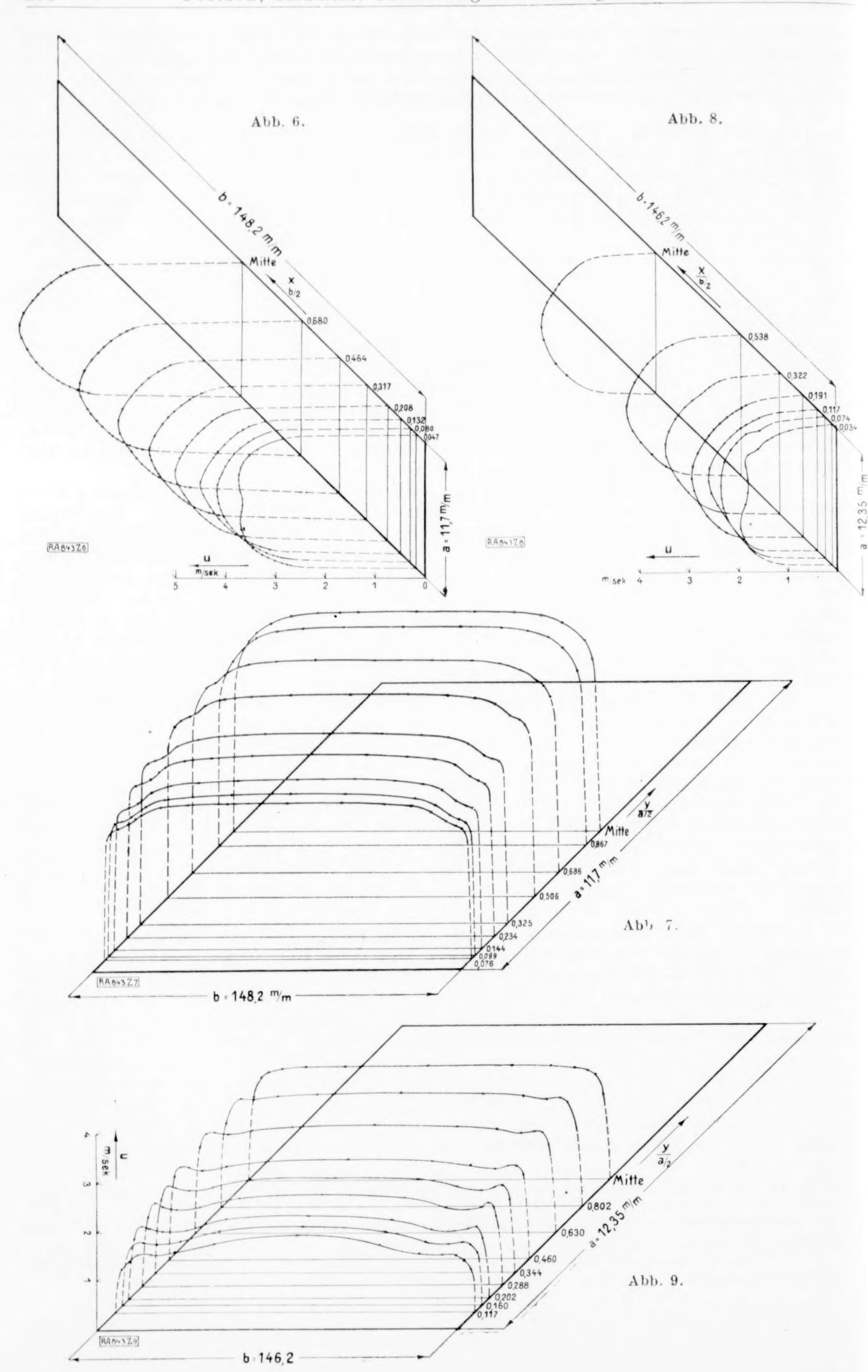



Abb. 6.

Abb. 8.

Abb. 7.

Abb. 9.

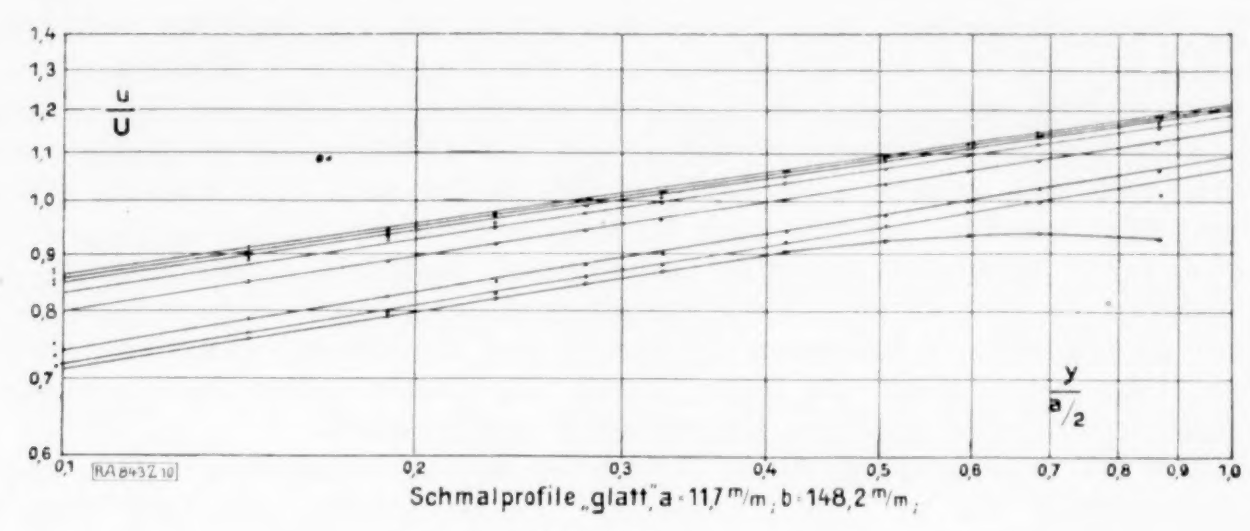



Abb. 10.

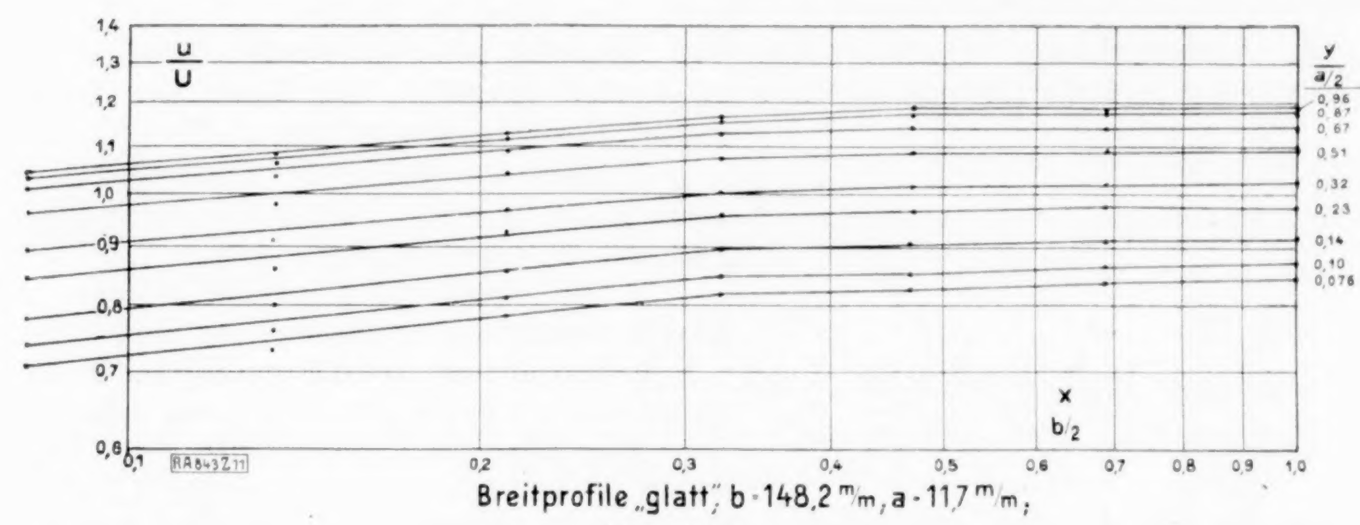



Abb. 11.

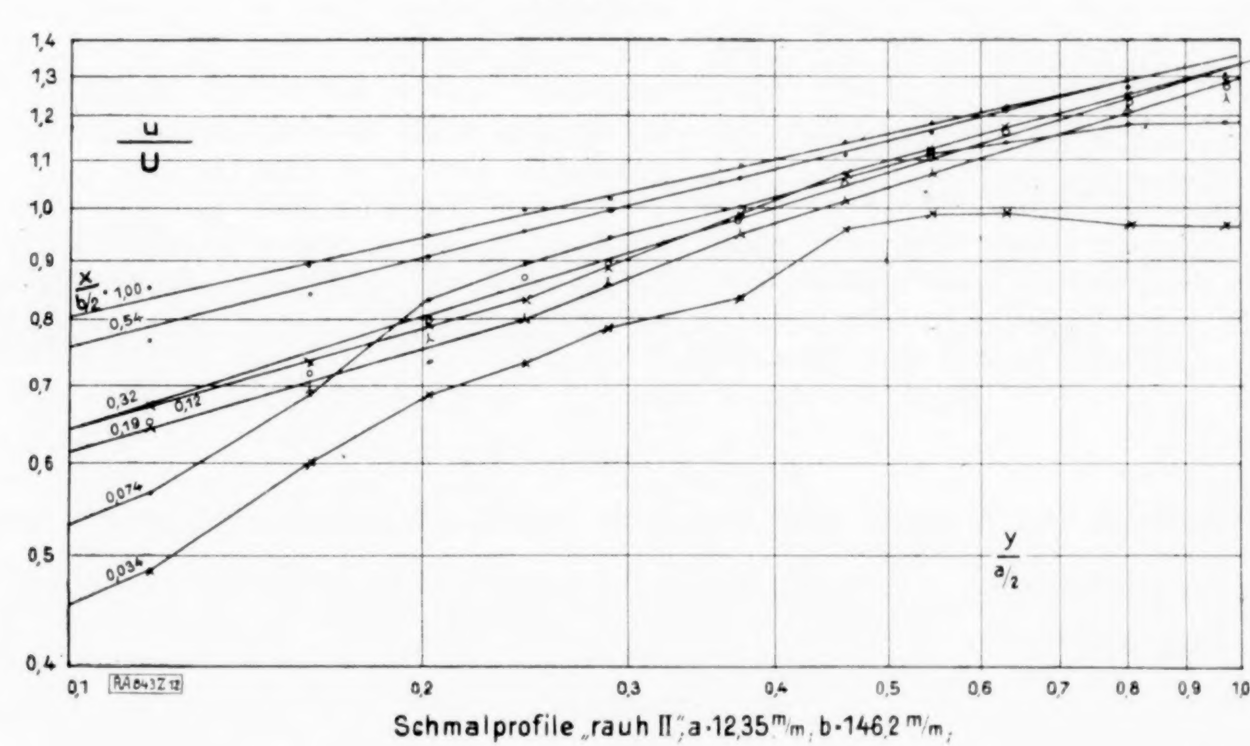



Abb. 12.

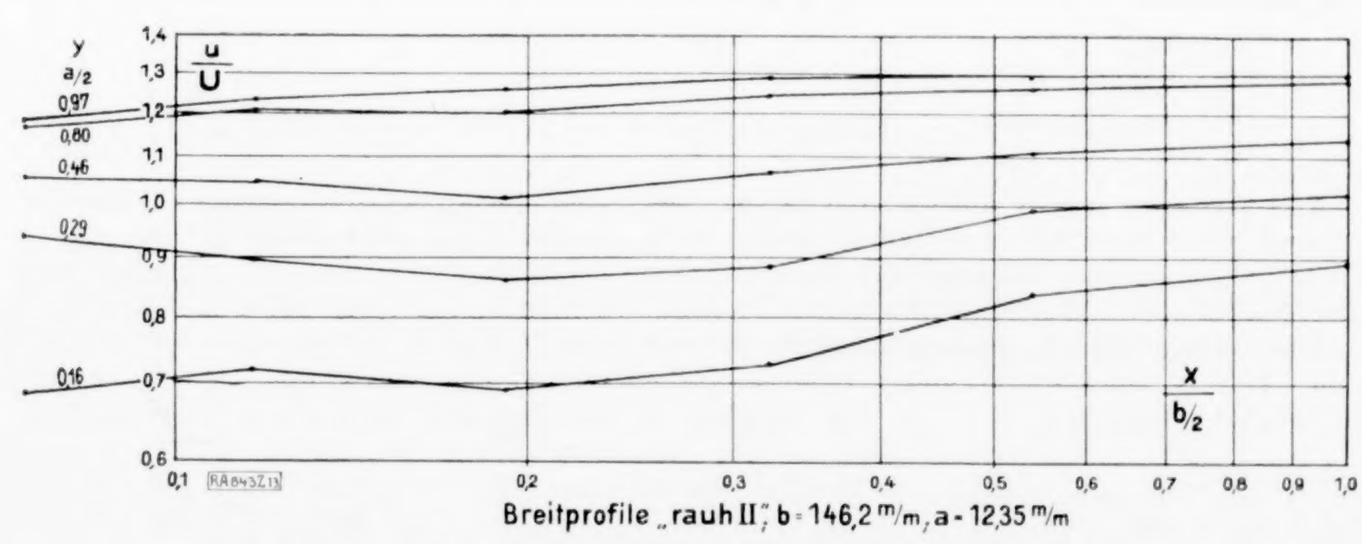



Abb. 13.

**3. Hauptversuche.** Der Zweck der Arbeit ist, klarzustellen, wie die Verteilung der Geschwindigkeit von der Rauhigkeit der Wand abhängt (s. Einleitung).

Ursprünglich waren vier Rinnenarten vorgesehen: glatt, wellig, rauh und zackig. Da sich aber bei den Versuchen zeigte, daß die »rauhe« Rinne gerade in das Uebergangsgebiet zwischen »rauh« und »wellig« fiel, mußte noch eine weitere, größere Rauhigkeit hinzugefügt werden, die mit rauh II bezeichnet wurde [1]).

Für jede Rauhigkeit wurden mindestens bei drei verschiedenen Rinnenhöhen (Schienenstärke 10, 15, 25 mm) Versuchsreihen durchgeführt. Einige Versuche sind auch mit Rinnenhöhe 35 mm (2 Schienen, 25 und 10 mm zusammen) gemacht. Ich glaube aber, daß diese Höhe nicht mehr als klein gegen die Breite gelten kann, weshalb man aus diesen Messungen keine sicheren Folgerungen ziehen kann.

Die Wassergeschwindigkeit in Rohrmitte betrug wenigstens 1 m/s und konnte bei kleiner Rinnenhöhe bis auf 5 m/s gesteigert werden. Dies entsprach etwa Reynoldsschen Zahlen von 5000 bis 25 000; bei großer Rinnenhöhe konnten Reynoldssche Zahlen bis über 35 000 erzielt werden.

**4. Auswertung.** Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, wie die Meßpunkte zur Ermittlung der Verteilungskurve ausgewertet wurden. Das Verfahren habe ich für jeden Versuch wiederholt.

Abb. 14.

Herausgegriffen sei Versuch Nr. 122, d. h. also: glatte Rinne, Plattenabstand 17 mm, zweitkleinste Geschwindigkeitsstufe.

Die Festlegung von $y$ wurde schon bei Beschreibung des Meßröhrchens (S. 202) dargelegt.

Der am Quecksilbermanometer abgelesene Staudruck $q$ verlangt noch eine Korrektur, weil die Messung noch innerhalb des Rohres, also unter einem gewissen statischen Druck, erfolgte. Dieser läßt sich aus dem Diagramm für den statischen Druck (Abb. 14) für Stelle $M$, $x = m$ mm vor dem Ausfluß (Abb. 4) sofort in mm W.-S. ablesen. Diese Ablesung, durch 13,6 dividiert, liefert den vom Quecksilbermanometer zuviel angezeigten Druck in mm Hg.-S.

Für Versuch 122 ist $m = 33$ mm; Druckhöhe an dieser Stelle in Rohrmitte 6,4 mm W.-S.; Druckhöhe in Ausflußquerschnittsmitte 0,9 mm W.-S.; Differenz 5,5 mm; umgerechnet:

$$p_m = 5{,}5 \text{ mm W.-S.} = \frac{5{,}5}{13{,}6} = \sim 0{,}4 \text{ mm Hg.-S.}$$

Also
$$q' = q - 0{,}4 \text{ (mm Hg.-S)}.$$

Die Errechnung von $v$ aus $q'$ geht aus Abb. 5 sehr einfach hervor; es ist

$$p_1 = p_0 + \frac{u^2 \cdot \gamma_W}{2\,g} - H \cdot \gamma_W, \qquad p_a = p_0 + h \cdot \gamma_{Hg} - H \cdot \gamma_W - h \cdot \gamma_W;$$

es muß aber sein
$$p_1 = p_2,$$

also auch
$$\frac{u^2 \cdot \gamma_W}{2\,g} = h \cdot \gamma_{Hg} - h \cdot \gamma_W.$$

Daraus ergibt sich
$$u = \sqrt{h \cdot \frac{\gamma_{Hg} - \gamma_W}{\gamma_W} \cdot 2 \cdot g}$$

oder
$$u = 0{,}497 \cdot \sqrt{h} \quad [\text{m/s}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

$$[g = 9{,}81 \text{ m/s}^2, \qquad \gamma_W = 1{,}0 \text{ g/cm}^3, \qquad \gamma_{Hg} = 13{,}6 \text{ g/cm}^3].$$

---

[1]) Alle Versuche tragen dreizifferige Zahlen, bei denen die erste Ziffer (Hunderter) die Rauhigkeit angibt. 1 = glatt, 2 = wellig, 3 = rauh I, 4 = rauh II, 5 = zackig I, 6 = zackig II; aus der 2. Ziffer (Zehner) geht die ungefähre Rinnenhöhe (Schienenstärke + Dichtung) hervor. 1 = 12 mm, 2 = 17 mm, 3 = 27 mm, 4 = 38 mm. Die letzte Ziffer (Einer) sagt die Reihenfolge einer Serie bei gleicher Rinnenhöhe und Wandrauhigkeit an, wobei 1 für die kleinste und 5 oder 6 für die größte Geschwindigkeit gesetzt sind. Zum Beispiel »324« heißt: Wandrauhigkeit rauh I, Rinnenhöhe etwa 17 mm, Geschwindigkeit ziemlich groß (3,5 m/s).

$U$ ergab sich aus der Messung am Ponceletgefäß zu 2,12 m/s; $u$ in Abhängigkeit von $y$ aufgetragen zeigt Abb. 15.

Bei glatten Wänden haben verschiedene Experimentatoren gefunden, daß die Verteilungskurve wenigstens in der Nähe der Wand durch eine Potenzkurve von der Form

$$u = \text{konst.} \cdot y^n$$

gut angenähert werden kann.

Man kann nun zunächst prüfen, ob dies durch unser Material bestätigt wird und auch auf die rauhen Rinnen übertragen werden kann.

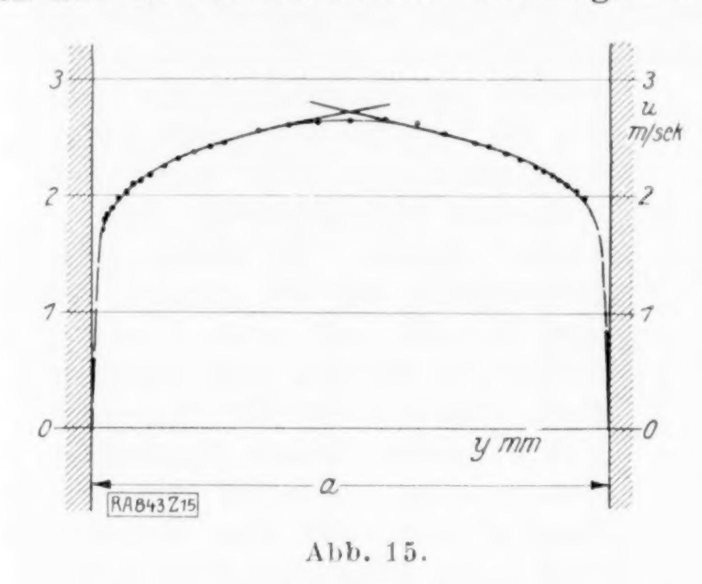


Abb. 15.

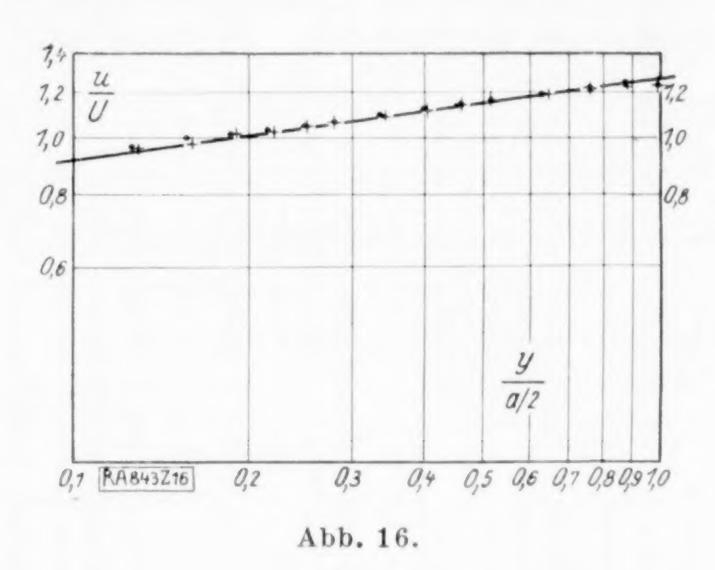


Abb. 16.

Zu diesem Zweck ist es am bequemsten, $\log \frac{u}{U}$ in Abhängigkeit von $\log \frac{y}{a/2}$ aufzutragen (Abb. 16). Handelt es sich um reine Exponentialkurven, so müssen alle Punkte auf einer Geraden liegen, deren Neigung die Größe des Exponenten $n$ angibt. Hierbei ist die exakte Bestimmung von $y$ sehr wichtig, da Fehler von nur $^1/_{10}$ mm die Neigung der Geraden merklich ändern.

In der Rohrmitte weichen die Meßpunkte regelmäßig ab, die gemessenen Werte sind kleiner. Desgleichen kann auch über die Verhältnisse in unmittelbarer Wandnähe $\left(\frac{y}{a/2} < 0{,}1\right)$ mit Sicherheit nichts mehr gesagt werden. Die Meßpunkte fallen auch hier unter die in Abb. 15 gezeichnete Gerade, sobald der Abstand des Meßröhrchens von der Wand 1 mm unterschreitet.

Für glatte Rohre kann man den Exponenten nach einem von Prandtl und v. Kármán[1]) angegebenen Verfahren aus der Form des Gesetzes für den Druckabfall ableiten. Für die Schubspannung an der Wand gelangt v. Kármán auf Grund des Widerstandsgesetzes zu der Formel:

$$\tau_0 = 0{,}0225 \cdot \varrho \cdot u^2 \cdot \left(\frac{\nu}{u \cdot y}\right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Setzt man nun mit einem allgemeinen Exponenten $n$:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{a/2}\right)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und schreibt andererseits Formel (4) verallgemeinert in der Form:

$$\frac{\tau_0}{\varrho \cdot u^2} = \zeta \cdot \left(\frac{u \cdot y}{\nu}\right)^{-m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a),$$

wobei man zunächst annimmt, daß die Schubspannung nur von der Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung der Wand (insbesondere also nicht von $a$) abhängt, so folgt aus Vergleich von (3) und (4a)

$$m = -\frac{2\,n}{n+1}, \qquad n = -\frac{m}{2+m}.$$

Für $m = -\,^1/_4$ entsprechend der Gl. (4) erhält man:

$$n = {}^1/_7.$$

**Wir wollen nun versuchen, den Ansatz (4a) auf den Fall der rauhen Rinne zu übertragen.** Der Exponent $m$ hat dann allerdings nicht mehr die Bedeutung wie in dem Ansatz (4a), indem

[1]) Abhandlungen aus dem Aerodyn. Institut Aachen, Heft 1.

er nicht die Abhängigkeit des Druckabfalls von der Reynoldsschen Zahl kennzeichnet, da im allgemeinen der Strömungswiderstand von der Kennzahl und von der relativen Rauhigkeit abhängt. Auch ist die Annahme, daß die Geschwindigkeit nur von der Schubspannung, von dem Wandabstand und den physikalischen Konstanten abhängt, nicht mehr berechtigt. Dies bedeutet, daß $\zeta$ nicht mehr als konstant angenommen werden kann; vielmehr muß man annehmen, daß es von der relativen Rauhigkeit und von der Kennzahl abhängig ist. Zuerst mußte die Größe von $\tau_0$ ermittelt werden. Hierzu diente die Messung des Druckabfalls. Wie bereits früher gesagt, war die Versuchseinrichtung größtenteils dieselbe, die schon Fromm zu seinen Messungen benutzte; auch fußt die ganze Arbeit auf den Frommschen Ergebnissen. Die hier behandelten Rauhigkeiten waren aber größtenteils andere als die von Fromm benutzten, die bis auf das Sägeprofil nicht mehr vorhanden und auch nicht mehr mit Sicherheit gleichwertig neu herzustellen waren. Es mußte daher der Druckabfall für die glatten, welligen und für die mit rauh I und II bezeichneten Rinnen neu bestimmt werden, während für die Sägeprofile die Frommschen Werte verwendet werden konnten. Um die hier benutzten Rauhigkeiten mit den Frommschen Messungen vergleichen zu können, ist in Abb. 17 der Koeffizient

$$\psi = \frac{h}{l} \cdot \frac{a \cdot g}{U^2}$$

in Abhängigkeit von $R$, beide im logarithmischen Maßstabe, aufgetragen. Dabei bedeutet $h/l$ den Druckabfall für die Längeneinheit. Die gefundenen Werte sind in sehr gutem Einklang mit den Frommschen Ergebnissen. Besonders interessant sind die Punkte für rauh I, durch die zum ersten Male ein offensichtlicher Uebergang von wellig zu rauh, d. h. also von der ersten zur zweiten Rauhigkeitsstufe

Abb. 17.

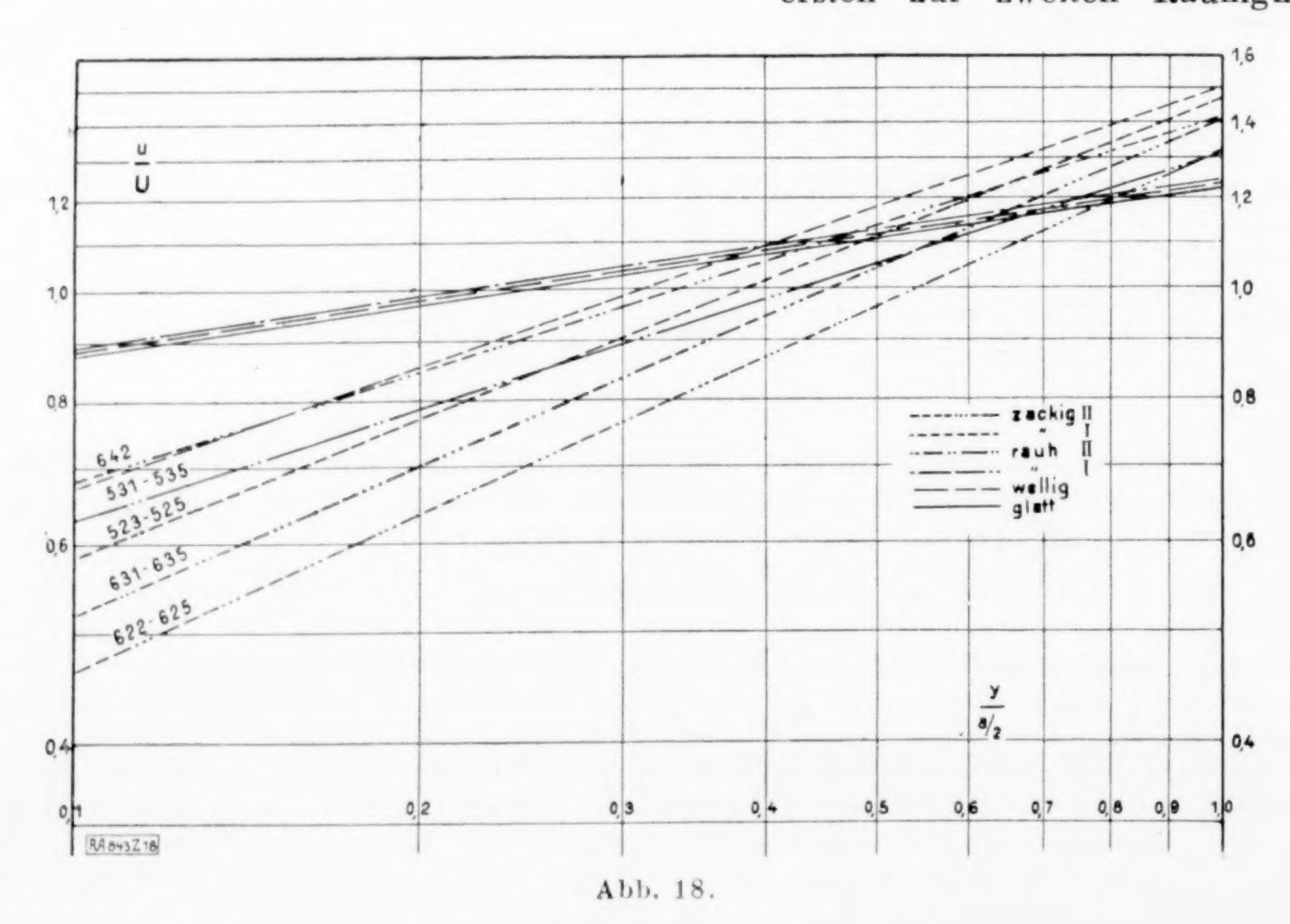



Abb. 18.

Zahlentafel I.

| | | | $a = 10 + \sim 2$ mm | | | | | | | $a = 15 + \sim 2$ mm | | | | | | | $a = 25 + \sim 2$ mm | | | | | | $a = 35 + \sim 3$ mm | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | Mittel | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Mittel | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Mittel | 41 | 42 | 43 |
| 1 | glatt | $h$ | 0,1415 | 0,1419 | 0,1481 | 0,1429 | 0,1426 | | 0,1432 | 0,1290 | 0,1393 | 0,1401 | 0,1366 | 0,1371 | 0,1389 | 0,1380 | 0,1380 | 0,1323 | 0,1373 | 0,1310 | 0,1345 | 0,1346 | 0,1287 | 0,1180 | 0,1157 |
| | | $m$ | 0,250 | — | — | — | — | | | 0,230 | — | — | — | — | — | | 0,230 | — | — | — | — | | 0,220 | — | — |
| | | $\zeta$ | 0,0204 | 0,0217 | 0,0221 | 0,0223 | 0,0227 | | | 0,0161 | 0,0161 | 0,0170 | 0,0172 | 0,0177 | 0,0180 | | 0,0192 | 0,0188 | 0,0186 | 0,0189 | 0,0190 | | 0,0182 | 0,0192 | 0,0187 |
| | | $R$ | 5 900 | 11 120 | 15 770 | 19 120 | 21 140 | | | 9 800 | 13 080 | 16 140 | 19 130 | 22 600 | 25 700 | | 13 580 | 18 280 | 22 700 | 27 600 | 31 220 | | 18 460 | 22 100 | 26 400 |
| 2 | wellig | $h$ | 0,1345 | 0,1340 | 0,1439 | 0,1404 | 0,1385 | | 0,1380 | 0,1446 | 0,1507 | 0,1415 | 0,1410 | 0,1416 | | 0,1420 | 0,1370 | 0,1326 | 0,1350 | 0,1329 | | 0,1342 | | | |
| | | $m$ | 0,240 | — | — | — | — | | | 0,245 | — | — | — | — | | | 0,245 | — | — | — | | | | | |
| | | $\zeta$ | 0,0246 | 0,0253 | 0,0262 | 0,0263 | 0,0264 | | | 0,0246 | 0,0257 | 0,0260 | 0,0265 | 0,0268 | | | 0,0247 | 0,0251 | 0,0253 | 0,0255 | | | | | |
| | | $R$ | 7 160 | 11 870 | 16 600 | 21 100 | 25 500 | | | 10 200 | 15 080 | 20 500 | 25 870 | 31 550 | | | 18 770 | 25 040 | 29 500 | 34 100 | | | | | |
| 3 | rauh I | $h$ | 0,1588 | 0,1580 | 0,1568 | 0,1570 | 0,1581 | 0,1591 | 0,1580 | 0,1332 | 0.1390 | 0,1443 | 0,1408 | 0,1391 | | 0,1392 | 0,1250 | 0,1290 | 0,1295 | 0,1326 | | 0,1290 | | | |
| | | $m$ | 0,269 | — | — | — | — | — | | 0,243 | — | — | — | — | | | 0,228 | — | — | — | | | | | |
| | | $\zeta$ | 0,0330 | 0,0342 | 0,0353 | 0,0368 | 0,0382 | 0,0398 | | 0,0239 | 0,0268 | 0,0289 | 0,0310 | 0,0330 | | | 0,0207 | 0,0232 | 0,0244 | 0,0248 | | | | | |
| | | $R$ | 7 400 | 10 200 | 13 320 | 16 710 | 19 500 | 22 280 | | 9 700 | 14 150 | 19 600 | 24 400 | 29 200 | | | 15 970 | 21 000 | 26 800 | 33 600 | | | | | |
| 4 | rauh II | $h$ | 0,2128 | 0,2623 | 0,2652 | 0,2624 | 0,2750 | 0,2780 | 0,2580 | 0,2220 | 0,2347 | 0,2240 | 0,2268 | 0,2411 | | 0,2290 | 0,2246 | 0,2393 | 0,2280 | 0,2280 | 0,2212 | 0,2275 | | | |
| | | $m$ | 0,369 | 0,426 | — | — | — | — | | 0,400 | — | — | — | — | | | 0,381 | — | — | — | — | | | | |
| | | $\zeta$ | 0,1195 | 0,2610 | 0,2960 | 0,3180 | 0,3350 | 0,3450 | | 0,1810 | 0,2250 | 0,2440 | 0,2600 | 0,2760 | | | 0,1530 | 0,1940 | 0,2115 | 0,2155 | 0,2200 | | | | |
| | | $R$ | 4 060 | 7 170 | 9 440 | 11 380 | 12 980 | 14 430 | | 8 400 | 12 700 | 15 400 | 18 500 | 23 000 | | | 15 000 | 21 600 | 26 950 | 31 200 | 35 200 | | | | |
| 5 | zackig I | $h$ | | | | | | | | | 0,392 | 0,410 | 0,403 | 0,397 | | 0,400 | 0,337 | | 0,339 | | 0,362 | 0,346 | | 0,2520 | |
| | | $m$ | | | | | | | | | 0,563 | 0,581 | 0,575 | 0,568 | | 0,572 | 0,504 | | 0,506 | | 0,531 | 0,514 | | | |
| | | $\zeta$ | | | | | | | | | 0,5470 | 0,2920 | 0,3040 | 0,3150 | | | 0,4210 | | 0,5880 | | 0,8720 | | | | |
| | | $R$ | | | | | | | | | 14 160 | 18 360 | 22 040 | 26 600 | | | 16 060 | | 22 600 | | 27 800 | | | 21 700 | |
| 6 | zackig II | $h$ | | | | | | | | | 0,448 | 0,454 | 0,456 | | | 0,453 | 0,435 | | 0,433 | | 0,431 | 0,433 | | 0,310 | |
| | | $m$ | | | | | | | | | 0.618 | 0,624 | 0,626 | | | 0,623 | 0,606 | | 0,604 | | 0,602 | 0,604 | | 0,473 | |
| | | $\zeta$ | | | | | | | | | 3,3500 | 3,8500 | 4,4000 | | | | 1,4850 | | 1,8350 | | 2,2000 | | | 0,7700 | |
| | | $R$ | | | | | | | | | 14 000 | 18 100 | 21 250 | | | | 15 880 | | 22 200 | | 27 900 | | | 26 600 | |

Zahlen

| Name | Literatur-Quelle | Material | a mm | b mm |
|---|---|---|---|---|
| Nikuradse | VDI-Forschungsheft Nr. 281 | Gezogenes Messing | 8,05 | 28,08 |
| Dönch | VDI-Forschungsheft Nr. 282 | Holz, gut geglättet | 149,7 | 650 |
| Géza Sasvári | Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1917, Heft 3, 4, 5, 6 | Eisenblech, geschweißt | 50 | 80 |
| | | | 50 | 80 |
| | | | 80 | 50 |
| | | | 80 | 50 |
| | | Eichenholz, gehobelt u. gefirnist | 60 | 60 |
| | | | 60 | 60 |
| | | | 30 | 120 |
| | | | 30 | 120 |
| Bazin (von Christen gerechnet) | Zeitschrift für Gewässerkunde, 6. Bd. (1904), S. 175. (T. Christen.) | Zement, geglättet | 800 Dmr. | |
| | | | 800 » | |
| Freemann (von Christen gerechnet) | | Messing, gezogen | 15 » | |
| | | | 15 » | |
| Krey | Zeitschrift für ang. Math. u. Mech. 1927, S. 112 | Eisen (oder Zement) | 1608 » | |
| | | | 1608 » | |

zur Geltung kommt. Bei der schmalen Rinne fallen die meisten Werte in die zweite Rauhigkeitsstufe ($\psi =$ konst. $u^2$); bei der mittleren Rinnenhöhe nur noch wenige Punkte; bei der großen Rinne liegt der ganze Meßbereich bereits im Gebiete der ersten Rauhigkeitsstufe (wellig). Die Schubspannung $\tau_0$ hängt offenbar mit $\psi$ durch die Beziehung:

$$\tau_0 = \psi \cdot \gamma \cdot \frac{U^2}{2\,g}$$

zusammen. Abb. 18 stellt nun die Geschwindigkeitsverteilung für die verschiedenen Rauhigkeiten dar, und zwar $\frac{u}{U}$ als Funktion von $\frac{y}{a/2}$ in logarithmischem Maßstabe aufgetragen und durch gerade Linien interpoliert. Die Neigungen dieser Geraden liefern die Exponenten $n$, die in der Zahlentafel I für jede Messung und für die Mittelwerte jeder Serie angeführt sind; Abb. 18 gibt jedoch nur die Mittelwerte an, um einigermaßen übersichtlich zu bleiben.

Aus den Tabellenwerten gewinnt man den Eindruck, daß der Exponent $n$ von der Rauhigkeit und innerhalb derselben Rauhigkeit von der Rinnenhöhe abhängt; eine systematische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (Kennzahl) läßt sich nicht nachweisen. Allerdings streuen die einzelnen Werte für $n$ um die Mittelwerte recht erheblich. Es ist indessen auch möglich, daß man noch in der Anlaufstrecke gearbeitet hat und die Verhältnisse darum noch nicht stationär sind. Die sehr ausführlichen Versuche von Schiller über die Länge der »Anlaufstrecke« besagen freilich, daß man $100 \times r$ ($r =$ Profilradius) vom Einlauf entfernt mit stationärem Zustand rechnen muß. Bei der größten Rinnenhöhe (ungünstigster Fall) beträgt die Rinnlänge aber immer noch rund $150 \times r$; bei der kleinsten sogar rund $350 \times r$.

Die Mittelwerte scheinen offensichtlich mit zunehmender Rinnenhöhe zuzunehmen. Dem widersprechen auch die Werte für die wellige Rinne nicht unbedingt; denn es ist sehr wahrscheinlich, daß bei der welligen Rinne alle Werte für $1/n$ im ungefähren Bereich von 6 bis 8 vorkommen, je nachdem, ob an der Meßstelle die Rinnenhöhe gerade groß oder klein ist; es war ja bei der welligen Rauhigkeit die Wellenlänge 1,5 bis 4 mal so groß wie die Rinnenhöhe. Bei der Nikuradseschen[1]) Versuchseinrichtung betrug die

[1]) J. Nikuradse, Forschungsarb. d. V. d. I., Heft 281.

tafel II.

| Medium | $u_{max}$ m/sek | $R$ | $\frac{1}{n}$ | $l$ mm | $r = \frac{F}{u}$ mm | $\frac{1}{r}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wasser | 14,35 | 32 000 | 5,92 | 1968 | 3,1 | 630 |
| » | 14,35 | 32 000 | 6,47 | 1968 | 3,1 | 630 |
| Luft | 20,67 | 63 000 | 7,52 | 6650 | 61 | 109 |
| | $U$ | | | | | |
| Wasser | 4,883 | 60 000 | 6,32 | 2400 | 15,4 | 155 |
| » | 7,086 | 87 000 | 6,97 | 2400 | 15,4 | 155 |
| » | 4,883 | 60 000 | 7,37 | 2400 | 15,4 | 155 |
| » | 7,086 | 87 000 | 6,95 | 2400 | 15,4 | 155 |
| » | 4,974 | 60 000 | 7,69 | 2400 | 15 | 160 |
| » | 7,034 | 85 000 | 7,00 | 2400 | 15 | 160 |
| » | 4,956 | 48 000 | 7,46 | 2400 | 12 | 200 |
| » | 6,427 | 62 000 | 7,00 | 2400 | 12 | 200 |
| » | ? | ? | 7,57 | 800 | 400 | 2 |
| » | ? | ? | 8,08 | 800 | 400 | 2 |
| » | ? | ? | 6,26 | 15 | 7,5 | 2 |
| » | ? | ? | 7,50 | 15 | 7,5 | 2 |
| » | 2,46 | 1 515 000 | 7,42 | ? | 804 | ? |
| » | 1,10 | 677 000 | 8,39 | ? | 804 | ? |

Rinnenhöhe 8 mm (mal 28 mm), was etwa $^2/_3$ der kleinsten Rinnenhöhe dieser Versuche entspricht; der reziproke Wert für $n$ liegt hier etwa bei 6, während er bei Dönch (freilich arbeitete Dönch mit Luft), dessen paralleler Kanal 130 mm (mal 650 mm) maß, um 8 schwankt. Auch die Versuche von Géza Sasvári[1]), der mit drei verschiedenen Kanälen (60 × 60, 50 × 80, 30 × 120 mm, glatt, Eisenblech) experimentierte, zeigen bei starker Streuung vornehmlich Werte um 7,5, stehen also mit dieser Erscheinung nicht im Widerspruch. (Vergl. auch Zahlentafel II.)

Die Werte $n$ für glatt, wellig und auch noch für rauh I sind wenig verschieden; für rauh II, zackig I und zackig II aber nehmen sie rapide ab. Vergleicht man hierzu die $\psi$-Linien in der Auftragung, wie sie Abb. 17 wiedergibt, so fällt sofort auf, daß man auch hier die gleichen Gruppen zusammenfassen kann. Die einen sind schräge Geraden unter einer Neigung von etwa $^1/_4$ bis $^1/_5$ (rauh I nimmt etwas Sonderstellung ein), die anderen mehr oder weniger horizontale Geraden (von zackig II abgesehen). Ferner sind die $\psi$-Werte bei der ersten Gruppe recht klein und auch untereinander nicht sehr verschieden; die $\psi$-Werte der übrigen Rauhigkeiten aber sind 3 bis 8 mal so groß.

In Abb. 19 sind für rauh I die Geschwindigkeitsprofile jeden Versuches jeder Serie besonders aufgetragen. Die Werte von $\frac{U}{u_{max}}$ weichen nicht unerheblich voneinander ab. Es fragt sich, ob diese Abweichung gesetzmäßig bedingt oder nur durch Versuchsungenauigkeit hervorgerufen ist. Es läßt sich dies an Hand des vorliegenden Materials nicht mit Sicherheit feststellen. Sehr oft nimmt der Wert $\frac{U}{u_{max}}$ mit wachsender Geschwindigkeit offensichtlich zu. Besonders das erste Profil jeder Serie liegt durchweg beträchtlich unter dem Mittelwert der ganzen Serie. Hier sei nochmals an die Erscheinungen bei den Profilmessungen über den ganzen Querschnitt erinnert. Vielleicht, sehr wahrscheinlich sogar, setzt sich bei größeren Geschwindigkeiten die Energie der Turbulenz in der Strömung stärker gegenüber dem »gleichrichtenden« Einfluß der Wände, insbesondere der Wandecken, durch. Es würde also bei höheren Geschwindigkeiten ein größeres Stück der Rinnenbreite angenähert zweidimensionalen Charakter haben; also der Wert $U$, der aus der

[1]) G. Sasvári, Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, Bd. 14 (1917), S. 21.

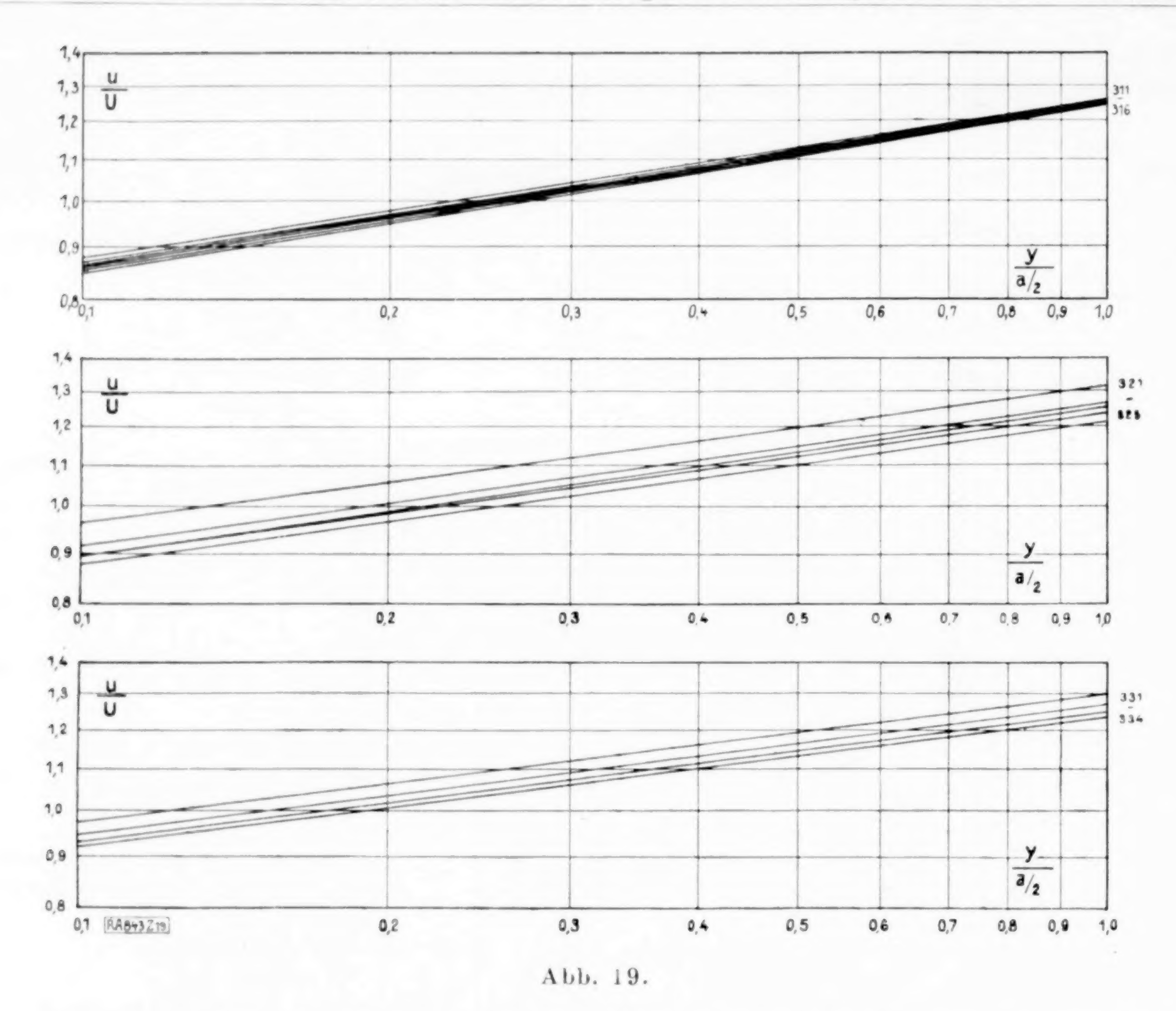



Abb. 19.

Düsenmessung gefunden ist und die mittlere Geschwindigkeit für den ganzen Querschnitt angibt, mehr mit der mittleren Geschwindigkeit des Profils übereinstimmen, das in Rinnenmitte aufgenommen ist. Um die Brauchbarkeit des Ansatzes (4 a) zu prüfen, ist in Abb. 20

$$\frac{\tau_0}{\varrho\, u^2} = \frac{\psi/2}{(u/U)^2}$$

in Abhängigkeit von $\frac{u \cdot y}{\nu}$ aufgetragen. Die Linien fallen nicht zusammen, sie verschieben sich ungefähr parallel mit zunehmender Geschwindigkeit; ob diese Verschiebung in linearer Beziehung zur Strömungsgeschwindigkeit steht (Versuch 311 bis 316) oder die Linien mit

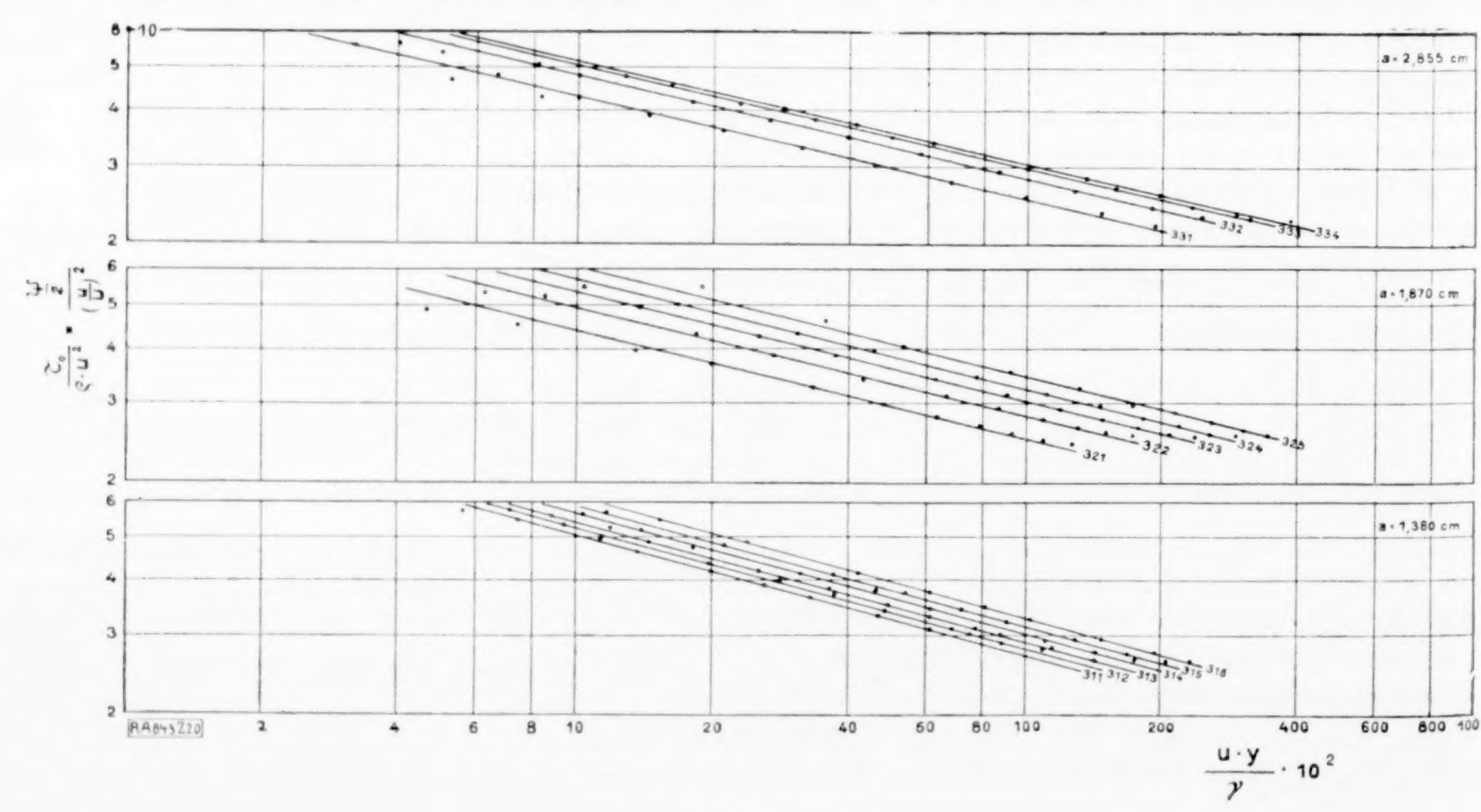



Abb. 20.

größer werdenden Reynoldsschen Zahlen einem festen Wert zustreben (Versuch 321 bis 325, 331 bis 334), geht aus dieser Auftragung nicht ohne weiteres hervor. Die Werte $\zeta$ lassen sich aus der Ordinate an der Stelle $\log \frac{u \cdot y}{\nu} = 1$ ablesen. Die so für alle Rauhigkeiten ermittelten $\zeta$ Werte sind in Abb. 21 in Abhängigkeit von $R$ und mit der Rinnenhöhe als Parameter aufgetragen. Da im ganzen und großen sowohl der Exponent $n$ als der Faktor $\zeta$ mit zunehmender Rauhigkeit wachsen, so ist es von Interesse, ihre gegenseitige Abhängigkeit darzustellen. Abb. 22 stellt $\zeta$ als Ordinate, $n$ als Abszisse dar. Man sieht, daß im logarithmischen Diagramm die Werte in der Nähe einer Geraden mit einer Neigung von ungefähr $^1/_5$ liegen. Ein ähnliches Ergebnis erhält man auch bei der Auswertung der Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht an einer Platte [vergl. Hansen[1])]. Ob da ein wirklicher gesetzmäßiger Zusammenhang besteht, muß zunächst dahingestellt bleiben.

Eine andere Methode, einen Einblick in die Verhältnisse zu gewinnen, besteht nun darin, die für die turbulente Reibungsübertragung charakteristische Länge, die von Prandtl eingeführte Mischlänge, zu ermitteln. Dies Verfahren scheint

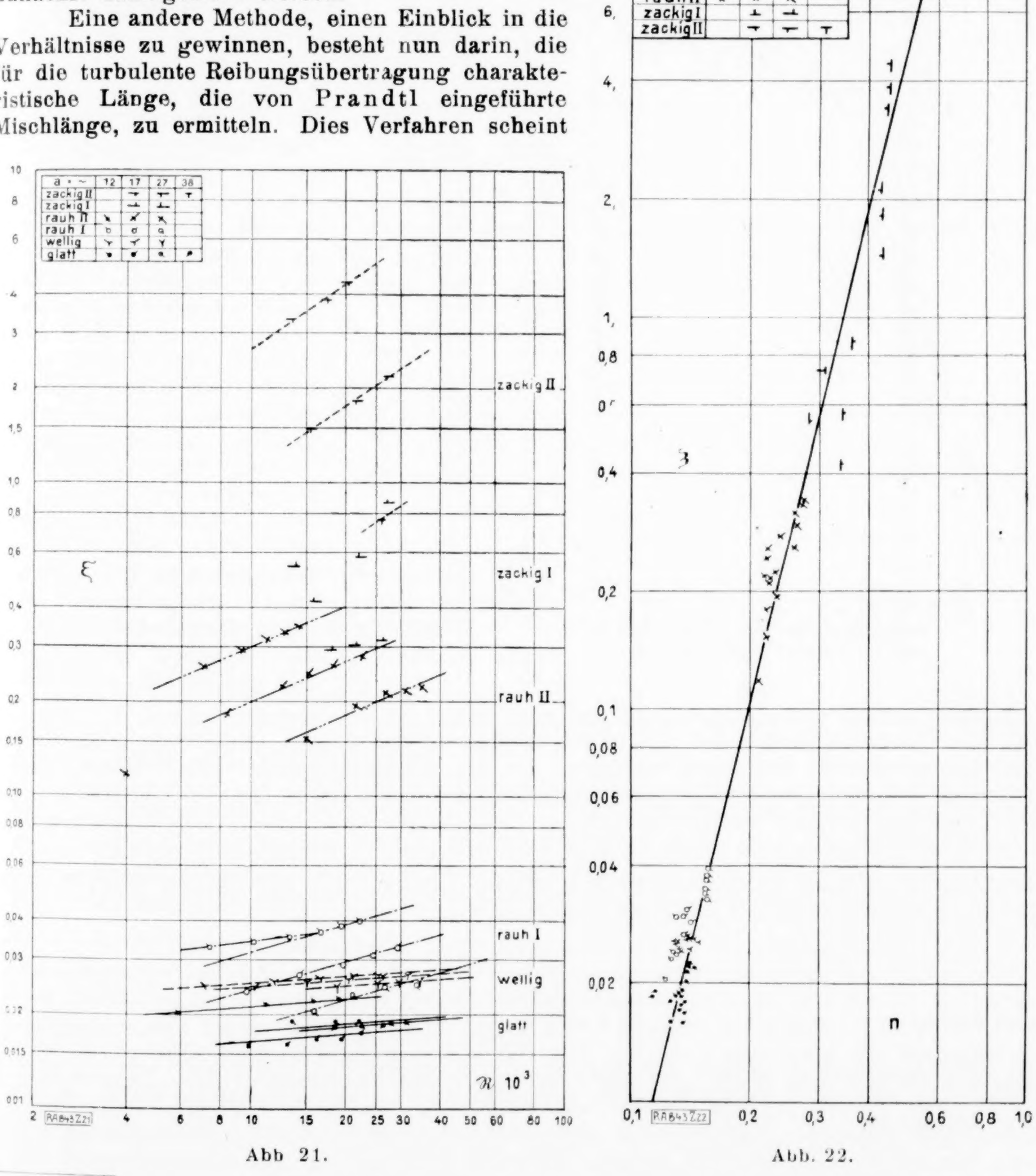



Abb 21. Abb. 22.

[1]) M. Hansen, Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 185 bis 199.

mehr Erfolg zu versprechen, insbesondere wenn man die Geschwindigkeitsverteilungskurven vergleicht, die zu dem gleichen Druckabfall, d. h. zu denselben Reibungswerten gehören. Wenn man die Geschwindigkeitsprofile für gleiche Wassermenge (Abb. 23) betrachtet, so scheinen die zu glatten und zu rauhen Rinnen gehörigen Verteilungskurven ganz verschiedenen Gesetzen zu folgen. In Abb. 24 können wir indessen die zu demselben Druckabfall, d. h. zu demselben Wert $\tau_0$ gehörigen Profile vergleichen. Es fällt sofort auf, daß, wenn man die Profile parallel verschiebt, die mittleren Teile beinahe genau zur Deckung gebracht werden können. Dies

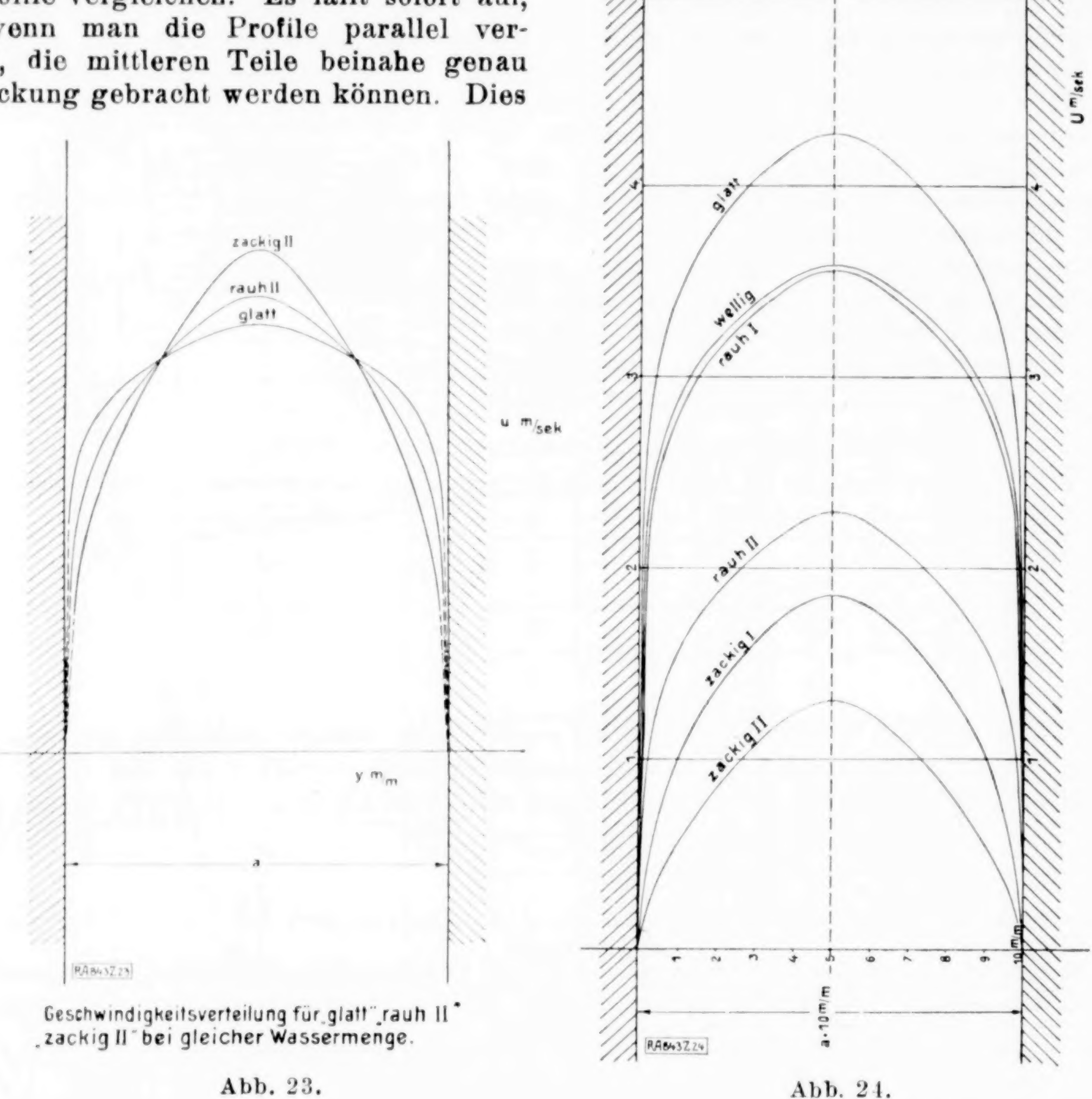



Abb. 23. Abb. 24.

legt die Vermutung nahe, daß wir es mit einem für alle Rinnen gemeinsamen Mechanismus der turbulenten Reibungsübertragung zu tun haben. Prandtl setzt für die Schubspannung bei turbulenter Reibungsübertragung statt des Stokes-Navierschen Ansatzes:

$$\tau = \text{const.} \cdot \varrho \cdot \lambda^2 \cdot \left(\frac{d\,u}{d\,y}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Länge $\lambda$ wird als die Mischlänge bezeichnet. Da $\lambda$ sowieso nur bis auf eine beliebige Konstante ermittelt werden kann, so schreiben wir:

$$\tau = \varrho \cdot \lambda^2 \cdot \left(\frac{d\,u}{d\,y}\right)^2$$

oder daraus:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\tau}{\varrho} \cdot \frac{1}{d\,u/d\,y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Schubspannung $\tau$ nimmt bei unserer Rinne, wenn wir die Breite als gegen die Rinnenhöhe sehr groß betrachten, mit dem Abstand von der Rinnenmitte linear zu, und zwar beträgt sie:

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{a/2 - y}{a/2}.$$

($\tau_0$ = Reibung an der Wand, $y$ = Entfernung von der Wand.) Führen wir die Entfernung von der Rinnenmitte

$$a/2 - y = \eta$$

ein und setzen

$$\tau_0 = \frac{\varrho \cdot U^2}{2} \cdot \psi ,$$

so wird

$$\frac{\tau}{\varrho} = \frac{\psi}{2} \cdot U^2 \cdot \frac{\eta}{a/2}$$

und

$$\lambda = U \cdot \sqrt{\frac{\psi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\eta}{a/2}} \cdot \frac{1}{\frac{du}{dy}}, \quad \lambda = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{\psi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\eta}{a/2}} \cdot \frac{1}{d\frac{u}{U} \Big/ d\frac{\eta}{a/2}} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Abb. 25 liefert das Ergebnis der Berechnung der Mischlänge. Wie zu erwarten war, sind die Abweichungen zwischen glatt, wellig, rauh I und rauh II verhältnismäßig gering. Es scheint daher, daß der Verlauf der Mischlänge, gleiche Rinnenhöhe vorausgesetzt, im Innern der Flüssigkeit von der Wandrauhigkeit ziemlich unabhängig ist. Die Linien für zackig I und II liefern eine stärkere Abweichung, aber merkwürdigerweise im entgegengesetzten Sinne. Hierzu muß bemerkt werden, daß bei den zackigen Sägeprofilen die Rauhigkeit nicht mehr klein gegen die Rinnenhöhe ist, so daß man verschiedene Werte bekommt, je nachdem man den Wandabstand von der tiefsten Stelle der Wand oder von der Spitze der Erhebungen ab rechnet. Wir haben die mittlere Lage zwischen beiden als Mittelwert genommen. Immerhin liegt darin eine gewisse Unbestimmtheit für die Versuche mit diesen extremen Rauhigkeiten. Es muß noch bemerkt werden, daß die Werte von $\frac{\lambda}{a/2}$ für $\frac{\eta}{a/2} < 0{,}2$ unsicher werden, weil man das Verhältnis zweier Größen zu nehmen hat, die beide gegen Null gehen.

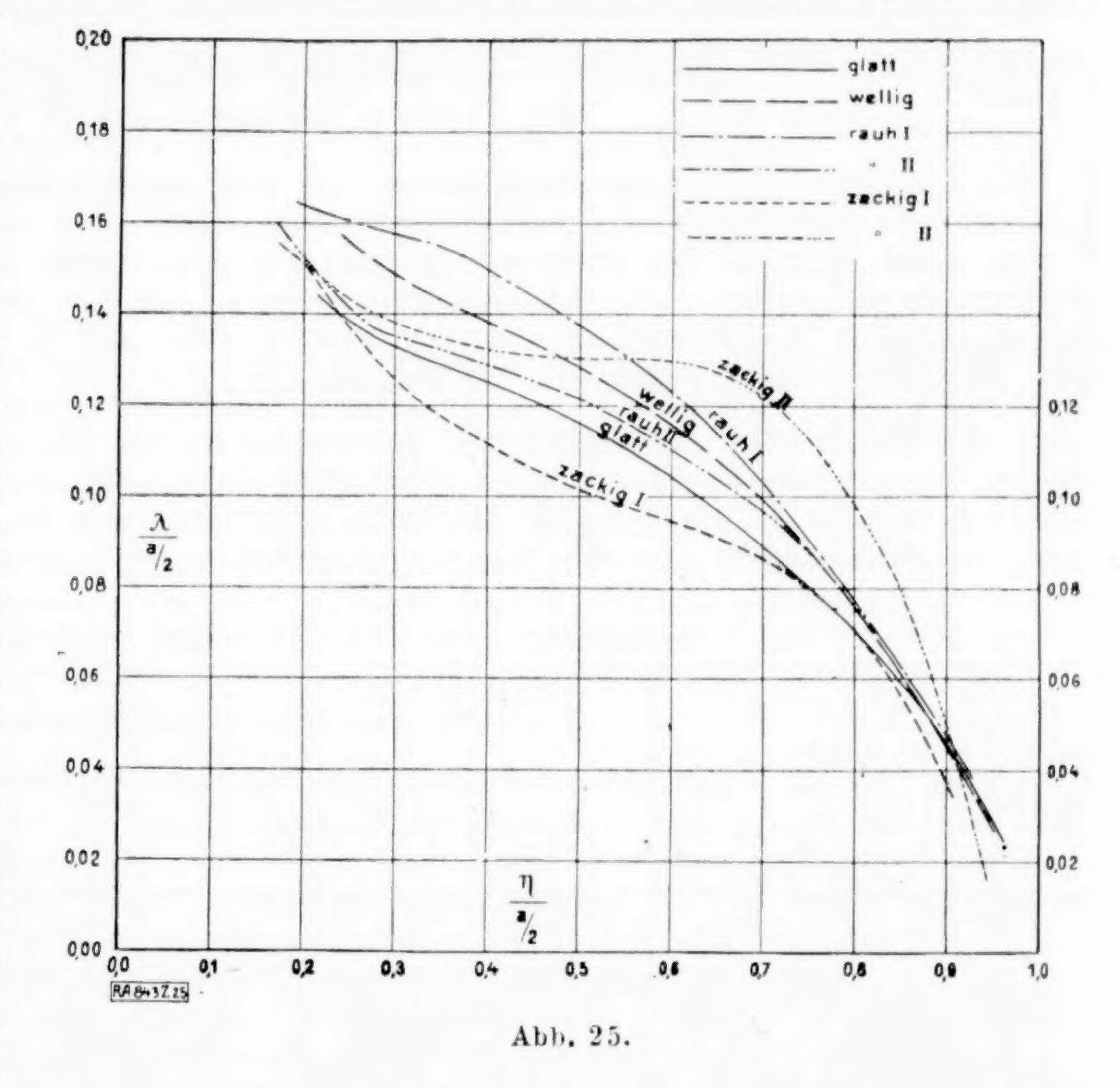



Abb. 25.

Diese Versuche ermöglichen noch nicht, das exakte Gesetz für den Verlauf der Mischlänge festzustellen, immerhin liefern sie für die weitere Entwicklung der Theorie einen wichtigen Anhaltspunkt, indem sie die Tatsache außer Zweifel stellen, daß die Geschwindigkeitsverteilung in einer Flüssigkeit im wesentlichen nur von der zu übertragenden Schubspannung, nicht aber von der besonderen Beschaffenheit der Wand abhängt.

**5. Schlußbemerkungen.** Der Abbruch des Versuchsraumes wegen der Vergrößerung des Aerodynamischen Instituts zwang mich, die Versuche zu beschleunigen, und ließ vor allem Nachversuche an kritischen Stellen nicht mehr zu, welche die Verhältnisse vielleicht etwas besser herausgeschält hätten. Der Meßbereich innerhalb Reynoldsscher Zahlen von 4000 bis 35000 ist zu klein, wie sich bei der Auswertung der Meßergebnisse herausstellte; eine Erweiterung nach oben und unten war jedoch ebenfalls aus Zeitmangel nicht mehr möglich. Größere Reynoldssche Zahlen können durch mehr Wasser und größeren Wasserdruck erreicht werden. Für kleinere Reynoldssche Zahlen müßte die Versuchseinrichtung grundlegend geändert werden. Der Ausfluß müße auf irgend eine Weise (Wasserführung über kleine Druckhöhe, oder Bremssieb) gegen »Herausfallen« des Wassers gesichert sein, die Messung dann aber innerhalb der Rinne stattfinden.

Daß man bei strömender Luft (relativ größere Rinnen und kleinere Meßinstrumente) auch beträchtlich näher (wieder relativ) an den Wänden messen und damit die Versuchsgenauigkeit erhöhen kann, ist wahrscheinlich

Zum Schluß möchte ich nicht versäumen, meinen Dank auszusprechen Herrn Professor Dr. Th. v. Kármán, dem Leiter des Aerodynamischen Instituts zu Aachen, der die Anregungen und Richtlinien zu dieser Arbeit gab, und seinem Stellvertreter während seiner Vortragsreise durch Amerika und Japan, Herrn Professor Dr. L. Hopf; beiden Lehrern verdanke ich die weitgehendste Unterstützung, durch die sie mir die Durchführung dieser Arbeit möglich machten. 843

# Über den Einfluß der Trägheitskräfte auf den Versickerungsprozeß des auf die Erdoberfläche gelangenden flüssigen Wassers.

Von **ALFRED VITOLS** in Riga.

In der Literatur findet man wenig Daten, die sich auf den Zusammenhang zwischen der Versickerungsintensität und der Zeit beziehen. Man weiß, daß die Versickerungsintensität nicht konstant ist, sondern sich mit der Zeit ändert, doch ist die Funktion $y'(t)$ (Versickerungsintensität, als erste Abgeleitete nach der Zeit der Länge der in die Erde eingedrungenen Wassersäule $y$) nicht oder wenig bekannt. In der vorliegenden Abhandlung wollen wir diese Funktion $y'(t)$ untersuchen.

**1. Empirische Grundlagen.** In der Arbeit von Dr. A. Mitscherlich: »Bodenkunde für Land- und Forstwirte«, 1905, S. 201, findet man folgende Zahlentafel von Wollny, in der die Tiefe des in die Erde eingedrungenen Wassers $y$ (Höhe der Wassersäule) in Abhängigkeit von der Zeit für verschiedene Bodenarten angegeben ist.

Eindringen des auftropfenden Wassers in den Boden (in cm).

| Nach Std. | Quarzsand | | | Quarzsand | | | Lehmpulver $<$ 0,25 mm | Lehmkrümel | | Bodenkonstituenten | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,01 bis 0,071 mm | 0,071 bis 0,114 mm | 0,114 bis 0,175 mm | locker | dicht | sehr dicht | | 0,5 bis 1 mm | 6,75 bis 9 mm | Quarz | Humus | Ton |
| | | | | 0,01 bis 0,071 mm | | | | | | | | |
| 0.5 | 23,5 | 58,0 | 100 + | 14,0 | 11,0 | 9,9 | 6,9 | 12,0 | 12,3 | 8,8 | 3,2 | 3,0 |
| 1 | 35,0 | 97,5 | — | 20,3 | 15,5 | 14,2 | 10,9 | 25,7 | 24,8 | 13,0 | 4,6 | 3,9 |
| 2 | 52.0 | — | — | 31,2 | 22,4 | 20,4 | 15,4 | 51,9 | 49,5 | 19,5 | 6,2 | 5,0 |
| 4 | 76,0 | — | — | 47,5 | 33,0 | 29,0 | 22,6 | 100,2 | 99,9 | 24,8 | 8,4 | 6,6 |
| ca. 7 | 100 + | — | — | 69,2 | 44,2 | 38,8 | 27,9 | — | — | 39,2 | 12,9 | 9,8 |
| » 10 | — | — | — | 80,0 | 54,9 | 46,0 | 34,9 | — | — | 47,0 | 16,4 | 10,9 |
| » 24 | — | — | — | — | 80,0 | 67,7 | 57,1 | — | — | 65,7 | 18,3 | 17,0 |
| » 48 | — | — | — | — | — | 80 + | 87,2 | — | — | 90,9 | 25,8 | 24,8 |
| » 72 | — | — | — | — | — | — | 100 + | — | — | — | 33,9 | 30,7 |

Die Versuche von Wollny wurden in der Art angestellt, daß auf eine Bodensäule, welche oben mit einem feinen Drahtnetz bedeckt war, kontinuierlich Wasser tropfte, und zwar wurde hierbei besonders darauf geachtet, daß das Wasser nie über dem Boden stand (der oberirdische Teil der Wassersäule $z = 0$ gehalten wurde).

Wenn man dennoch das Material von Wollny empirisch bearbeiten wollte, so wäre von der empirischen Funktion $y' = \frac{dy}{dt}$ folgende Beschaffenheit zu verlangen:

1. Für jede homogene Bodenart ist $y'$ eine bestimmte stetige Funktion der Zeit $t$;
2. die Anfangsintensität $(y')_{t=0} = y_0'$ ist eine bekannte, für jede Bodenart spezifische Größe;
3. es ist $y'' = \frac{d^2 y}{d^2 t} < 0$, d. h., die Versickerungsbeschleunigung ist negativ oder die Versickerungsintensität fällt mit der Zeit $t$;
4. $(y')_{t=\infty} = y'_\infty$ ist wiederum eine bekannte, für jede Bodenart spezifische Größe.

Was die Form des empirischen Gesetzes $y' = f'(t)$ anbelangt, so kann man zum Beispiel setzen:

$$y = a\,t + b\,t^2 + c\,t^3 \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}) \qquad \text{oder} \qquad t = a_1\,y + b_1\,y^2 + c_1\,y^3 \quad . \quad (\mathrm{II}).$$

Man findet die drei Koeffizienten $a$, $b$ und $c$ bzw. $a_1$, $b_1$ und $c_1$, indem man jedesmal ein System von drei Gleichungen auflöst, dessen Sonderwerte für $y$ und $t$ der obenerwähnten Zahlentafel von Wollny zu entnehmen sind.

Die Bedingung $(y)_{t=0} = 0$, $(t)_{y=0} = 0$ ist in (I) oder (II) schon eingeschlossen. Man erhält also Kurven, von denen vier Punkte mit den beobachteten sich decken. Auf die auf solchem Wege gewonnenen empirischen Formeln darf natürlich keine Extrapolation angewandt werden. Ueberdies dürfen innerhalb ihres Geltungsbereiches keine Wendepunkte vorkommen, da dies der Bedingung 3, daß $\frac{d^2 y}{d t^2} < 0$, wiedersprechen würde.

Als weitere brauchbare Formeln sind folgende zu verzeichnen:

$$y' = w_0 + C\,e^{-k\,t}, \qquad y = w_0\,t + \frac{C}{k}\left(1 - e^{-k\,t}\right)$$

und

$$y = w_0 + C\,(1 + a\,t)^{-k}, \qquad y = w_0\,t + \frac{C}{a\,(1-k)}\left\{(1 + a\,t)^{1-k} - 1\right\},$$

wo $k$, $w_0$, $C$ und $a$ positive Zahlen sind.

Beide Formeln entsprechen den vier aufgestellten Bedingungen; Wendepunkte für endliche $t$ gibt es nicht. Der Unterschied zwischen diesen beiden Formeln ist der, daß die erste durch drei Größen, die zweite durch vier Größen bestimmt ist. Wenn man nun die Daten der Wollnyschen Zahlentafel für die Bestimmung der Koeffizienten dieser Formeln benutzt, so stößt man auf eine Besonderheit dieser Daten: während sich die Koeffizienten der ersten Formel bequem bestimmen lassen, kann man für die zweite Formel — wenigstens für das Anfangsstück der Wollnyschen Kurve — keine gleichzeitig positiven Werte der Koeffizienten $w_0$, $C$, $k$ und $a$ finden. Wie wir später sehen werden, steckt hierin eine neue Bestätigung der Gültigkeit des bekannten Darcyschen Versickerungsgesetzes. Wir gehen jetzt zur Vesickerungstheorie über.

**2. Die Versickerungs (Filtrations-)theorie.** Wir betrachten eine zylindrische Wassersäule, deren einer Teil, $y$, in die Erde gedrungen ist, während $z$ die Höhe des oberirdischen Teils ist. Wir wollen annehmen, daß der Boden aus homogenem Material besteht, das bis auf unendliche Tiefe hinabreicht. Das Erdmaterial soll dem Darcyschen Versickerungsgesetz gehorchen, dessen Ausdruck ist: $w = w_0\,i$, wo $w$ die Versickerungsintensität, $i$ der hydraulische Gradient (hydraulisches Gefälle) und $w_0$ der für jede Bodenart spezifische Koeffizient ist. Wie leicht zu ersehen ist, bedeutet $w_0$ ebenfalls eine Intensität, nämlich die, welche $w$ bei $i = 1$ erreichen würde. Wir wollen nun auf die in Abb. 1 dargestellte Wassersäule den aus der Mechanik bekannten Satz der lebendigen Kraft anwenden, daß die elementare Arbeit der auf einen Körper wirkenden Kräfte gleich ist der entsprechenden Aenderung der lebendigen Kraft dieses Körpers. Was die zylinderartige Form der Wassersäule anbelangt, so kann man vorläufig annehmen, daß dieselbe in ein materielles Rohr eingeschlossen ist. Wir werden später zeigen, daß es in der Natur freie, praktisch nahezu zylinderförmige Versickerungsströme geben kann und daß man, einem gewissen Gesetze folgend, einen freien zylinderartigen Strom verwirklichen kann. Der aktiven Kräfte sind drei: die Kraft der Schwere, der atmosphärische Druck und die Kapillarkraft. Letzte wirkt an der Oberfläche des Bodens und kann, wenigstens für die Anfangsperiode, wie wir später sehen werden, nicht vernachlässigt werden.

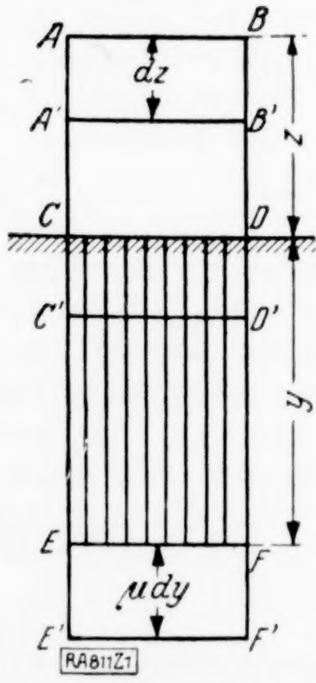


Abb. 1.

Die passiven Kräfte sind: die Reibungskraft, die mit Hilfe des Darcyschen Versickerungsgesetzes ausgedrückt werden kann, und der atmosphärische Druck. Bei der Aufstellung der Differentialgleichung müssen der oberirdische Teil $z$ und der unterirdische $y$ gesondert betrachtet werden, da nicht alle Kräfte für die beiden Teile dieselben sind. Es seien nun folgende Bezeichnungen eingeführt:

$v$ die Geschwindigkeit in dem Teile $z$,
$w$ die Geschwindigkeit in dem unterirdischen Teile $y$ (Versickerungs- oder Filtrationsintensität),
$F$ die Querschnittsfläche der Wassersäule,
$\gamma$ das spezifische Gewicht des Wassers,
$p_0$ der atmosphärische Druck,
$\mu$ der Porositäts-Koeffizient der trockenen Erde,
$\mu_1$ der Porositäts-Koeffizient der vorher benetzten Erde.

(Man muß diese beiden $\mu$ und $\mu_1$ unterscheiden: beim erstmaligen Durchdringen der trockenen Erde wird eine bestimmte Wassermenge von den Erdkörnern zurückgehalten, um dieselben mit einer dünnen Wasserschicht zu umhüllen. Dadurch werden die Hohlräume enger, wodurch $\mu > \mu_1$ ist. Wenn das Wasser in eine vorher benetzte Erde eindringt, ist $\mu = \mu_1$.

Diese vorläufige Benetzung muß man aber von der kapillaren Benetzung unterscheiden, bei der die Hohlräume durch Wasser versperrt sind, so daß das Eindringen neuer Wassermengen erschwert ist.)

Jetzt wollen wir die einzelnen Ausdrücke für die Arbeit der verschiedenen Kräfte finden. Der Seitendruck leistet, da er senkrecht zu der Bewegungsrichtung der Wassersäule steht, keine Arbeit. Wir werden daher nur noch mit dem atmosphärischen Druck auf die Flächen $AB$ und $EF$ rechnen müssen. Um die Arbeit des Gewichtes des Teiles $z$ zu bestimmen, wird man den Massenmittelpunkt der Säule $z$ nach Verlauf der Zeit $dt$ berechnen müssen. Der Anfangsmassenmittelpunkt war $c_0 = z/2$. Um den neuen zu finden, wollen wir das statische Moment der Säule $A'B'C'D'$ in bezug auf die Achse $CD$ finden. Dieses Moment $m$ ist: $m = (z + dz)\left(\frac{z + dz}{2}\right) - \mu_1 \frac{dy^2}{2}$ ($dz$ ist negativ, $dy$ positiv), daher hat der neue Massenmittelpunkt die Höhe $\frac{1}{2} z + dz$. Die Senkung des Massenmittelpunktes ist:

$$-dz = v\,dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Die Senkung des Massenmittelpunktes des unterirdischen Teiles $y$ ist $dy$, wie man sich leicht überzeugen kann.

Nun ist die Arbeit des Gewichtes der Wassersäule $(z + y)$:

$$z F \gamma v\,dt + \mu_1 F \gamma y\,dy \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Die Kapillarkraft kann durch die kapillare Aufstieghöhe $h_0$ ausgedrückt werden, die für jede Bodenart spezifisch ist. Die Arbeit der Kapillarkraft ist:

$$\mu_1 F \gamma h_0\,dy \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

denn die Kraft ist $\mu_1 F \gamma h_0$ und die Verschiebung ihres Angriffpunktes $dy$. Die Arbeit des atmosphärischen Druckes auf die Fläche $AB$ ist: $p_0 F v\,dt$. Die Arbeit der Gegenwirkung dieses Druckes von unten nach oben auf die Fläche $EF$ ist $p_0 \mu F\,dy$, folglich ist die gemeinsame Arbeit des atmosphärischen Druckes:

$$p_0 F v\,dt - p_0 F \mu\,dy \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Jetzt wollen wir den Ausdruck für die Reibungsarbeit finden, die der Versickerungsstrom in der Erde zu leisten hat. Diese Arbeit wird den $i$ ten Teil der Arbeit der Schwere der unterirdischen Wassersäule ausmachen. Die Arbeit der Schwere dieses Teiles laut (2) ist $\mu_1 F \gamma y\,dy$, folglich ist die Reibungsarbeit $\mu_1 F \gamma y\,dy\,i$, wo $i$ durch das Darcysche Versickerungsgesetz $w = w_0 i$ bestimmt ist, also ist die Reibungsarbeit

$$\mu_1 F \gamma y\,dy \frac{w_0}{w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Der entsprechende Zuwachs der lebendigen Kraft der ganzen Wassersäule ist:

$$\frac{z F \gamma v\,dv}{g} + \mu_1 \frac{F \gamma y w\,dw}{g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Ein vorläufiger Ausdruck des Satzes der lebendigen Kraft ist nach (2), (3), (5) und (6) folgender:

$$z F \gamma v\,dt + \mu_1 F \gamma y\,dy + \mu_1 F \gamma h_0\,dy - \mu_1 F \gamma y \frac{w}{w_0}\,dy = \frac{z F \gamma v\,dv}{g} + \mu_1 \frac{F \gamma y w\,dw}{g} \quad (7).$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen, wenn man die Kontinuitätsbedingung des Stromes $F v\,dt = \mu F w\,dt$, oder

$$v = \mu w,\; v' = \mu w' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

einführt. Außerdem wird man den Ausdruck (7) den Fällen anpassen müssen, wo der unterirdische Teil des Stromes beständig bleibt, d. h. sich nicht verlängert, wie in Fällen, wo der Versickerungsstrom durch größere Hohlräume abgeschnitten wird. Für den Fall der Verlängerung der unterirdischen Säule muß man $d\,y = w\,d\,t$ setzen.

Mit $d\,v = v'\,d\,t$ und $d\,w = w'\,d\,t$ und (8) geht der Ausdruck (7) nach Kürzung durch $F\,\gamma\,w\,d\,t$ über in

$$(\mu^2 z + \mu_1 y)\frac{w'}{g} + \mu_1 y \frac{w_0}{w} = \mu z + \mu_1 (y + h_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Dieser Ausdruck ist die Differentialgleichung der Versickerung in ihrer allgemeinen Gestalt.

Die Gl. (9) enthält, außer der unabhängigen Veränderlichen $t$, 3 veränderliche abhängige Größen $z$, $y$ und $w$. Es bedarf besonderer Ergänzungsbedingungen, um die Zahl der abhängigen Größen in (9) auf eine einzige abhängige Größe zu reduzieren. Wir gehen zu diesen Ergänzungsbedingungen über, die durch Sonderfälle gegeben sind.

**3. Sonderfälle.** A) Die Wassersäule $(z + y)$ soll durch einen Regen erzeugt werden, dessen Intensität $\Delta$ als Funktion der Zeit $t$ ist. Dann hat man die Bedingungen:

$$\int_0^t \Delta\,d\,t = z + \mu y \quad . \quad . \quad (10), \qquad \Delta = z' + \mu y' \quad . \quad . \quad (11), \qquad \Delta' = z'' + \mu y'' \quad . \quad . \quad (12).$$

Wenn die unterirdische Säule frei nach unten sich verlängern kann, dann ist noch die erwähnte Bedingung gegeben:

$$w = \frac{d\,y}{d\,t} = y', \quad w' = y'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Mit Hilfe dieser Bedingungen kann man die Zahl der abhängig Veränderlichen in (9) auf eine einzige ($z$ oder $y$) reduzieren. Was das Gesetz $\Delta(t)$ anbelangt, so wollen wir $\Delta = \Delta_0$ konstant setzen. Dann liefert die Ausnutzung der Bedingungen von (10), (11), (12) und (13) aus (9):

$$\{\mu^2 (\Delta_0 t - \mu y) + \mu_1 y\}\frac{y''}{g} + \mu_1 y \frac{y'}{w_0} = \mu(\Delta_0 t - \mu y) + \mu_1 (y + h_0) \quad . \quad . \quad (14),$$

oder wenn das Wasser in den vorher mäßig benetzten Boden eindringt, das ist, wenn $\mu = \mu_1$ gesetzt werden kann:

$$\{\mu_1 (\Delta_0 t - \mu_1 y) + y\}\frac{y''}{g} + y \frac{y'}{w_0} = \Delta_0 t - \mu_1 y + y + h_0 = \Delta_0 t + y(1 - \mu_1) + h_0 \quad (15).$$

B)
$$H_0 = z + \mu y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Man kann diese Bedingung so interpretieren, daß der Regen aufgehört hat, nachdem er die Säule $(z + y)$ ergeben hat — und nun werden die Versickerungserscheinungen nach dem Aufhören des Regens untersucht. Die Bedingung (13) bleibt bestehen. Die betreffende Differentialgleichung folgt aus (14) bzw. (15), indem man $\Delta_0 t$ durch $H_0$ ersetzt. Dann hat man:

$$\{\mu^2 (H_0 - \mu y) + \mu_1 y\}\frac{y''}{g} + \mu_1 y \frac{y'}{w_0} = \mu(H_0 - \mu y) + \mu_1 (y + h_0) \quad . \quad . \quad (17),$$

oder wenn $\mu = \mu_1$ ist:

$$\{\mu_1 )H_0 - \mu_1 y) + y\}\frac{y''}{g} + y \frac{y'}{w_0} = H_0 - \mu_1 y + y + h_0 = (H_0 + h_0) + y(1 - \mu_1) \quad (18).$$

Praktisch handelt es sich hier um das Austrocknen verschiedener Reservoire im Boden: Gräben, Gruben, Teiche usw. Zu diesem Falle wäre es besser, in (17) und (18) diejenige veränderliche Größe zu belassen, die sich am leichtesten beobachten läßt, d. h. es wäre wünschenswert, Gleichungen zu gewinnen, in denen $z$, der oberirdische Teil, enthalten ist. Unter dieser Bedingung erscheinen die Gl. (17) und (18) in neuer Gestalt:

$$\left(\frac{\mu^2 z}{\mu_1} + \frac{H_0 - z}{\mu}\right)\frac{z''}{g} + \frac{(H_0 - z)\,z'}{\mu\,w_0} = \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_1}\right) z - (H_0 + \mu h_0) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und

$$\left(\mu_1 z + \frac{H_0 - z}{\mu_1}\right)\frac{z''}{g} + \frac{(H_0 - z)\,z'}{\mu_1\,w_0} = (1 - \mu_1) z - (H_0 + \mu_1 h_0) \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Es muß hier erwähnt werden, daß die Gestalt der Gl. (19) und (20) für Laboratoriumsversuche sehr bequem ist. Der Autor hat sich dieser Form bedient, um experimentell die aufgestellten Gleichungen zu prüfen.

C) $z = z_0 =$ konst. Die Bedingung (13) hat Geltung. Man gewinnt die entsprechenden Gleichungen, indem man in (9) $z$ mit $z_0$ vertauscht. Das Resultat ist:

$$(\mu^2 z_0 + \mu_1 y)\frac{y''}{g} + \mu_1 y \frac{y'}{w_0} = \mu z_0 + \mu_1 (y + h_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

oder, wenn $\mu = \mu_1$:

$$(\mu_1 z_0 + y)\frac{y''}{g} + y \frac{y'}{w_0} = z_0 + y + h_0 = (z_0 + h_0) + y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Durch Lösung dieser Gleichungen gelangt man zu dem Regen oder überhaupt zu der Quelle, die das beständige Niveau $z_0$ sichert.

Die Intensität dieses Regens oder der Quelle wird sein $\Delta = \mu y'$, oder überhaupt $v$ (Zufluß, bezogen auf das freie Niveau $AB$) $= \mu y'$, wobei $y' = f(t)$ die Gl. (21) und (22) befriedigt. Der Fall C hat ebenfalls einen großen praktischen Wert. Die Gl. (21) und (22) bedingen das Erhalten des Niveaus neuerbauter Kanäle und Reservoire im Erdboden.

D) Wenn man den beständigen Wert von $z_0$ gleich 0 setzt, so gelangt man zu dem im Anfange dieses Artikels besprochenen Falle des künstlichen Regens von Wollny, denn dieser hatte bei seinem Versuche $z = z_0 = 0$ eingehalten. Die entsprechende Gleichung läßt sich sehr leicht aus (21) oder (22) gewinnen, wenn man da $z = 0$ setzt. Dann hat man:

$$y \frac{y''}{g} + y \frac{y'}{w_0} = y + h_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Wir wollen hier erwähnen, daß sich aus der Formel (23) die Differentialgleichung für den kapillaren Aufstieg leicht gewinnen läßt, wenn man $y$ negativ nimmt. Dann erhält man:

$$y \frac{y''}{g} + y \frac{y'}{w_0} + (h_0 - y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

E) $y$ bleibt konstant, $y = y_0$. Wir greifen auf die Grundformel (9) zurück, die jetzt in folgender Form umgeschrieben werden kann:

$$(\mu^2 z + \mu_1 y_0)\frac{w'}{g} + \mu_1 y_0 \frac{w}{w_0} = \mu z + \mu_1 y_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Das Glied $h_0$ ist jetzt weggelassen, da ein Stromfaden, der die ganze Erdsäule $y_0$ durchdringt, zwei Kapillarkräften unterworfen ist, einer, die am oberen Ende und der anderen, die am unteren Ende wirkt. Diese Kräfte heben sich gegeneinander auf. Infolgedessen ist der Ausdruck (25) frei von $h_0$.

Da die Säule $z$ frei sinkt, ohne von oben etwas hinzu zu bekommen, so ist:

$$v = \mu_1 w = -\frac{dz}{dt} = z', \qquad w = -\frac{z'}{\mu_1}, \qquad w' = \frac{-z''}{\mu_1}.$$

Auch der Porositätskoeffizient $\mu$ ist in diesem Falle ein einziger. Es muß nämlich $\mu = \mu_1$ gesetzt werden, weil die Erdsäule $y_0$ vom Wasser durchdrungen und die Benetzung schon geschehen ist. Wenn man nun $w$ und $w'$ durch $-z'/\mu_1$ und $-z''/\mu_1$ ersetzt, so gewinnt die Gl. (25) die endgültige Form:

$$(\mu_1 z + y_0)\frac{z''}{g} + y_0 \frac{z'}{w_0} = -\mu_1 (z + y_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Auch diese Gleichung ist für Laboratoriumversuche sehr bequem, um ihre Gültigkeit zu prüfen. Der Autor hat auch diese Gleichung für diesen Zweck ausgenutzt. Die aufgestellte Gleichung kann die in der Natur vorkommende Erscheinung beleuchten, wo der Versickerungsstrom durch einen Hohlraum in der Erdmasse abgeschnitten wird (Risse, Auskalkungen im Boden).

**4. Prüfung der aufgestellten Differentialgleichungen.** Die aufgestellten Differentialgleichungen lassen sich nicht direkt integrieren. Mann könnte nur Annäherungsintegrale finden. Diese Arbeit ist nicht einfach, und der Autor gedenkt dieser Aufgabe einen speziellen Artikel zu widmen. Wir werden uns hier auf die Aufgabe beschränken, einige charakteristische Punkte der $y'$-Kurve zu bestimmen und den allgemeinen Verlauf dieser Kurve aufzuklären. Wir kehren zu dem Falle des gleichmäßigen Regens zurück, der durch die Gl. (15) charakterisiert ist. Zuerst erhebt sich die Frage nach der Anfangsintensität, die wir durch $y_0'$ bezeichnen wollen. Um diese zu finden, wollen wir uns vorstellen, daß der unterirdische Teil $y$ fehlt, was ja auch für den Anfangsmoment richtig ist. Nun haben wir ein Sieb, auf welches der Wasserstrom $\Delta_0$ sich ergießt.

Die Kontinuitätsbedingung ist dann: $\Delta_0 = \mu y_0'$, woraus folgt $y_0' = \Delta_0/\mu$. Dieses Resultat zeigt, daß es überhaupt keine bestimmte Anfangsintensität für die Versickerung gibt, sondern daß sie durch die Intensität des Regens bedingt ist.

Um den Verlauf der $y'$-Kurve zu klären, wollen wir untersuchen, ob es Extreme von $y'$ bei endlichen $y$ und $t$ gibt. Wenn man, $t$ und $y$ endlich vorausgesetzt, $y'' = 0$ annimmt, so verwandelt sich (15) in:

$$y \frac{y'}{w_0} = (\Delta_0 t - \mu_1 y) + y + h_0,$$

woraus folgt:

$$y' = w_0 \left\{ \frac{(\Delta_0 t - \mu_1 y)}{y} + 1 + \frac{h_0}{y} \right\} > w_0 ,$$

weil $(\Delta_0 t - \mu_1 y)$ immer positiv ist. Dieses Resultat würde aber bedeuten, daß in dem Ausdruck (7) $\mu_1 F \gamma y \, d y < \mu_1 F \gamma y \frac{w}{w_0} d y$, d. h., daß die Reibungskraft größer ist als die aktive Kraft selbst, welche die Reibungskraft hervorgerufen hat, was doch nicht möglich ist. Folglich kann nur sein $(y'')_{t=y=\infty} = y_\infty'' = 0$.

Wenn man (15) durch $y$ dividiert und auf $y = t = \infty$ übergeht, so hat man für $y:t$ zu setzen $y_\infty'$ und erhält Ausdrücke der Art $\frac{\infty}{\infty}$, deren Wert durch Differenzieren gefunden werden kann. Wenn man die erwähnten Operationen ausführt, so gelangt man zu dem Ausdruck:

$$\left\{ \mu_1 \left( \frac{\Delta_0}{y_\infty'} - \mu_1 \right) + 1 \right\} \frac{y_\infty''}{g} + \frac{y_\infty'}{w_0} = \frac{\Delta_0}{y_\infty'} + (1 - \mu_1).$$

Wenn nun aber $y_\infty'' = 0$ bei endlichem $y_\infty$ ist, so hat man

$$y_\infty'^2 - (1 - \mu_1) w_0 \, y_\infty' - \Delta_0 w_0 = 0,$$

Die positive Wurzel:

$$y_\infty' = \frac{(1 - \mu_1) w_0 + \sqrt{(1 - \mu_1)^2 w_0^2 + 4 \Delta_0 w_0}}{2} \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

gibt die Lösung.

Man sieht also, daß die im Anfange des Artikels aufgestellte 4. Bedingung wirklich richtig ist, wobei $y_\infty'$ eine Funktion von $\Delta_0$, $\mu_1$ und $w_0$ ist, $y_\infty' = f(\Delta_0, \mu_1, w_0)$. Der Ausdruck (12) $z'' + \mu y'' = 0$ zeigt, daß $y'' = -z''/\mu$ negativ sein muß, sonst würde sich keine oberirdische Schicht bilden können. Da $y''$ negativ ist, muß sein: $y_0' = \Delta_0/\mu_1 \gtreqless y_\infty'$, was mit Rücksicht auf (27) zu der Bedingung führt

$$\Delta_0 \gtreqless (1 - \mu_1) \mu_1 w_0 + \mu_1^2 w_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28),$$

andernfalls wäre die Bildung der oberen Schichte nicht möglich. Folglich bilden nicht alle Regen die Oberschicht. Bei $\Delta_0 = \mu_1 w_0$ gibt (27) $y_\infty' = w_0$

Wir sind bis jetzt zu der Erkenntnis gelangt, daß $y_\infty'' = 0$, $y'' < 0$, $y_0' = \frac{\Delta_0}{\mu_1}$ oder $y_0' = \Delta_0/\mu$ und $y_\infty$ eine endliche Größe ist.

Wir wollen noch $y_0''$ finden. Zu diesem Zwecke müssen wir in (15) $y = t = 0$ setzen. Dies gibt, da $h_0 \neq 0$, einen unendlichen Wert für $y_0''$. Wir haben schon gefunden, daß $y''$ negativ sein muß, folglich ist $y_0'' = -\infty$. Abb. 2 zeigt den allgemeinen Verlauf der $y'$-Kurve für gleichmäßigen Regen. Der allgemeine Verlauf der Versickerungskurve zeigt, daß die mit der Zeit eintretende Verminderung der Versickerungsverluste in neuerbauten Kanälen und Reservoiren nicht nur von der Verschlammung des Bodens abhängig ist, sondern daß dieselbe auch die Folge einer zu intensiven Füllung der Kanäle oder der Reservoire sein kann.

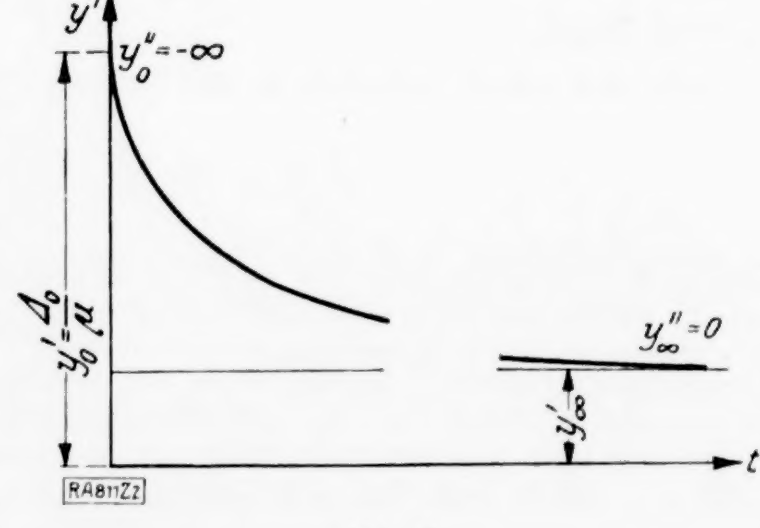


Abb. 2.

Wir unterlassen hier die Prüfung der Differentialgleichungen für die übrigen Sonderfälle, die manche Eigentümlichkeiten

aufweisen, mit Ausnahme der Gl. (23) (Fall des Regens von Wollny). Wenn man für genügend entfernte Zeiträume $h_0$ im Verhältnis zu $y$ fortläßt, so entsteht die Gleichung:

$$\frac{y''}{g} + \frac{y'}{w_0} = 1 \qquad \text{(28 bis)}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$y' = w_0 + \left(\frac{A_0}{\mu} - w_0\right) e^{-\frac{g\,t}{w_0}} = w_0 + C\,e^{-k\,t}.$$

Man sieht jetzt, daß dieses Integral der einen empirischen Formel entspricht, von der die Rede in Abschnitt 1 war, wodurch das Darcysche Versickerungsgesets eine neue Bestätigung gefunden hat.

**5. Rolle der Isolationsschichten im Boden neuerbauter Kanäle.** Um die Versickerung im Boden neuerbauter Kanäle zu verringern, pflegt man den Boden mit einer Isolationsschicht, die gewöhnlich Lehm enthält, zu verkleiden. Die Differentialgleichung, die ein beständiges Niveau sichert, ist (22):

$$(\mu_1 z_0 + y)\frac{y''}{g} + y\frac{y'}{w_0} = y + (z_0 + h_0).$$

Wollen wir die Geschwindigkeit $(y')_{y=t=\infty} = y_\infty{}'$ finden, so haben wir:

$$\left\{\left(\frac{\mu_1 z_0}{y} + 1\right)\frac{y''}{g}\right\}_{y=t=\infty} + \left(\frac{y'}{w_0}\right)_{y=t=\infty} = \frac{y_\infty{}''}{g} + \frac{y_\infty{}'}{w_0} = 1 + \left(\frac{z_0 + h_0}{y}\right)_{y=\infty} = 1.$$

Da $y_\infty{}'' = 0$ ist, wird $y_\infty{}' = w_0$, d. h., die Versickerungsintensität in unendlicher Zeit wird dem Koeffezient $w_0$ der Darcyschen Formel gleich. Nachdem wir dieses festgestellt haben, wollen wir annehmen, daß der Boden des Kanals aus $n$ verschiedenen Erdschichten besteht, deren Gesamtausdehnung in vertikaler Richtung unendlich groß ist.

Wenn nun der Versickerungsprozeß unendlich lange Zeit gedauert hat, dann kann man, wie wir schon wissen, $y_\infty{}'' = 0$ setzen, d. h., die Trägheitskräfte können vernachlässigt werden. Ebenfalls ist die Kapillarkraft auch verschwindend klein, und man kann $h_0 = 0$ setzen. Hierauf vereinfacht sich die Grundgleichung (7), die nur für eine Schicht aufgestellt ist, folgendermaßen ($z = z_0 =$ Konstant):

$$z_0\,F\,\gamma\,v\,d\,t + \mu_1\,F\,\gamma\,y\,d\,y = \mu_1\,F\,\gamma\,y\,\frac{w}{w_0}\,d\,y \qquad (7^{\text{bis}}).$$

Für eine Schicht, welche den Index $i$ hat, wird diese Gleichung sein:

$$z_0\,F\,\gamma\,v\,d\,t + \mu_i\,F\,\gamma\,y_i\,d\,y_i = \mu_i\,F\,\gamma\,y_i\,\frac{w_i}{w_{0\,i}}\,d\,y_i \qquad (7^{\text{ter}}).$$

Laut (8) ist aber:

$$F\,v\,d\,t = \mu\,F\,w\,d\,t = \mu\,F\,d\,y\ldots,$$

folglich vereinfacht sich ($7^{\text{ter}}$) zu:

$$z_0 + y_i = y_i\,\frac{v}{\mu_i\,w_{0\,i}} \qquad (29),$$

wo $w_{0\,i}$ der entsprechende Koeffizient der Formel von Darcy für die Schicht $i$ ist. Wenn die Erdsäule aus $n$ Schichten besteht, so ist:

$$z_0 + \sum_{i=1}^{i=n} y_i = v \sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i}{\mu_i\,w_{0\,i}},$$

woraus folgt;

$$v = \frac{z_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{y_i}{\mu_1\,w_{0\,i}}} \qquad (30).$$

Nehmen wir jetzt an, daß $(n-1)$ Isolationsschichten von endlicher Ausdehnung, wenn auch, entsprechend ihrer Rolle, mit sehr kleinen $w_{0\,i}$ vorhanden sind. Dann kann man die Formel (30) umschreiben:

$$v = \frac{z_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} y_i + y_n}{\sum\limits_{i=1}^{i=n-1} \frac{y_i}{\mu_i\,w_{0\,i}} + \frac{y_n}{\mu_n\,w_{0\,n}}} \qquad (31).$$

Wollen wir jetzt die Grundschicht $y_n$ unendlich tief annehmen, so hat man:

$$(v)\; y_{n=\infty} = \left\{ \frac{\dfrac{z_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} y_i + 1}{y_n}}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n-1} \dfrac{y_i}{\mu_i w_{0i}} + \dfrac{1}{\mu_n w_{0n}}}{y_n}} \right\} = \mu_n w_{0n} \quad \ldots \ldots \quad (32),$$

d. h., die Versickerungsintensität ist unabhängig von der Beschaffenheit der Isolationsschichten und diese verlieren also ihre Rolle bei $y_n = \infty = t = \infty$. Wenn in der Säule Hohlräume vorkommen, die den Versickerungsstrom abschneiden, so daß er nicht stetig wird, so dürften die Isolationsschichten ihre Rolle behalten.

### 6. Der Versickerungsstrom kann sich frei nach allen Seiten verbreiten.

Es wurde schon erwähnt, daß die entwickelte Theorie sich auf den künstlichen Fall bezieht, wo die Seitenverbreitung des Stromes durch ein Rohr verhindert ist. Im folgenden wollen wir ein wenig die Frage der freien Verbreitung des Versickerungsstromes beleuchten. Wir nehmen an, daß ein Reservoir mit sphärischer Bodenform im Boden geschaffen ist. Wenn man dem Versickerungsprozeß gleich vom Anfang folgen würde, so würde man einsehen, daß die Stromsäule erst nach unendlicher Zeit eine endgültige Gestalt annähme. Bis dahin wäre die Versickerungsintensität $y' f(y, t)$. d. h., wir hätten mit einer mit der Zeit veränderlichen Strömung zu tun. Für $t = \infty$ wäre auch hier die Beschleunigung der Versickerung $y_\infty'' = 0$, und man könnte die Strömung als stationäre betrachten.

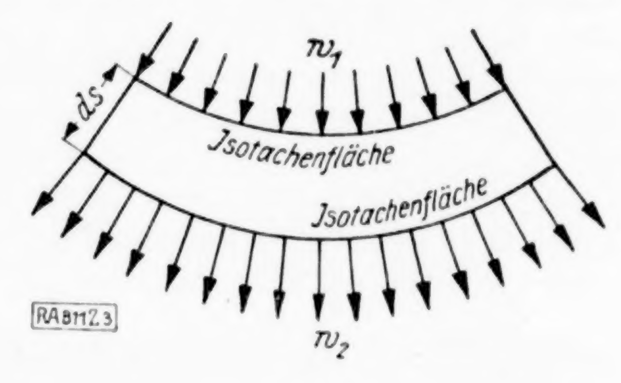


Abb. 3.

Um dies zu beweisen, sei zuerst an die Tatsache erinnert, daß die freie Grundwasserströmung eine Potentialströmung ist, die sich durch die Existenz der Isotachenflächen, d. h. derjenigen Flächen im Inneren der Versickerungsstromsäule, auf welche Versickerungsgeschwindigkeitsvektore gleichen Betrages senkrecht gerichtet sind, auszeichnet (siehe Abb. 3). Die Kontinuitätsbedingung für einen mit der Zeit veränderlichen Strom ist:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (F w)}{\partial s} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33),$$

wo $F$ den Querschnitt des Stromes, $w$ die Geschwindigkeit, $s$ die Länge des Stromabschnittes und $t$ die Zeit bedeuten. Multipliziert man die Gl. (33) mit $ds$, so erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial t} ds + \frac{\partial (F w)}{\partial s} ds = \frac{\partial (F\, ds)}{\partial t} + \frac{\partial (F w)}{\partial s} ds = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial V}{\partial s} ds\right)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} ds = 0 \qquad (33^{\text{bis}}),$$

wo $V$ das Volumen des betreffenden Stromabschnittes, $Q$ aber die Durchflußmenge bedeuten. Wir wollen die Gl. ($33^{\text{bis}}$) nach $s$ integrieren. Diese Operation liefert, da $\dfrac{\partial V_0}{\partial t} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} V_s = (Q_0 - Q_s) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

Wie aus der Hydraulik bekannt, ist der Zuwachs der lebendigen Kraft der Säule (siehe Abb. 4) gleich dem Ausdruck:

$$\frac{\gamma}{g} F w\, dt \frac{w^2}{2} - \frac{\gamma}{g} F_1 w_1\, dt \frac{w_1^2}{2} = Q\, dt \left(\frac{w^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}\right),$$

wo, außer $\gamma$ und $g$, $F$ und $F_1$, die Isotachenoberflächen $AB$ und $CD$ der Stromsäule, $w$ und $w_1$ die Versickerungsgeschwindigkeiten — oder Intensitäten am unendlich entfernten Ende der Säule $CD$ und am Boden des Reservoirs $AB$ sind.

Der Zuwachs dieser lebendigen Kraft ist gleich der elementaren Arbeit, welche von den Kräften geleistet wird, die auf die Stromsäule einwirken. Diese Kräfte sind: der atmosphärische Druck $p_0$, das Gewicht $G$ der Säule und die Reibungskraft laut dem Gesetze von Darcy. Was die Arbeit des atmosphärischen Druckes, der auf den Seitenmantel der Säule wirkt, anbelangt, so ist diese 0, weil der Druck normal auf die Verschiebung

seines Angriffpunktes steht. Es ist noch die Arbeit des atmosphärischen Druckes auf die obere und die untere Isotachenflächen $AB$ und $CD$ zu bestimmen. Da in den Isotachenflächen keine Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren $w$ fallen, folgt der Druck in der Isotachenfläche dem hydrostatischen Gesetz und in einem Punkte $m$ in der Isotachenfläche $CD$ herrscht der Druck $p_0 + \gamma h$. Die elementare Arbeit dieses Druckes ist $(p_0 + \gamma h)\, d F\, w\, d t$, und die Arbeit des Druckes auf die ganze Isotachenfläche $CD$ ist $p_0 F w\, dt + \gamma w\, dt \int^F h\, dF$. Das letzte Integral hat die Bedeutung des Volumens $CDE$ (siehe Abb. 4).

Abb. 4.

Die Arbeit des Gewichtes der Stromsäule kann $\gamma F w\, y\, d t = \gamma Q\, y\, d t$ gesetzt werden, wenn die horizontale Ebene, von der nach unten die Ordinaten $y$ der Bernoullischen Gleichung gezählt werden, durch den Mittelpunkt 0 der Fläche $AB$ gedacht wird. Die Arbeit der Reibungskraft, die dem Gesetze von Darcy gehorcht, ist:

$$\int_0^y \int_0^F \frac{w}{w_0}\, d y\, d F\, \gamma\, w\, d t = \gamma\, \frac{Q\, d t}{w_0} \int_0^y w\, d y\,,$$

wenn man die Integration zuerst an der Isotachenfläche ausführt. Wenn man nun die Ausdrücke laut dem Gesetze der lebendigen Kraft vereinigt, so findet man:

$$\gamma\, Q\, d t \left(\frac{w^2}{2\,g} - \frac{w_1^2}{2\,g}\right) = \gamma\, Q\, d t\, y + p_0\, F\, w\, d t - p_0\, F_1\, w_1\, d t + \gamma\, w\, d t \int^F h\, d F\, +$$
$$- \gamma\, w_1\, d t \int^{F_1} h\, d F_1 - \gamma\, \frac{Q\, d t}{w_0} \int_0^y w\, d y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Da $\qquad p_0\, F\, w\, d t - p_0\, F_1\, w_1\, d t = p_0\, Q\, d t - p_0\, Q_1\, d t \quad$ und $\quad Q = Q_1$

ist, fällt $p_0\, F\, w\, d t - p_0\, F_1\, w_1\, d t$ weg und die Gl. (35) wird nach Kürzung durch $\gamma\, d t$:

$$Q \left(\frac{w^2}{2\,g} - \frac{w_1^2}{2\,g}\right) = Q\, y - w \int^F h\, d F + w_1 \int^{F_1} h\, d F_1 - \frac{Q}{w_0} \int_0^y w\, d y$$

oder

$$Q \left(\frac{w^2}{2\,g} - \frac{w_1^2}{2\,g}\right) = Q\, y + \frac{w\, F}{F} \int^F h\, d F - \frac{w_1\, F_1}{F_1} \int^{F_1} h\, d F_1 - \frac{Q}{w_0} \int_0^y w\, d y.$$

Die weitere Kürzung durch $Q$ und die Einführung

$$\int^F \frac{h\, d F}{F} = h_0 \qquad \text{und} \qquad \int^{F_1} \frac{h\, d F_1}{F_1} = h_{0\,1}$$

liefert:

$$\frac{w^2}{2\,g} - \frac{w_1^2}{2\,g} = y + h_{0\,1} - h_0 - \frac{1}{w_0} \int_0^y w\, d y.$$

Bei genügend großen $y$ kann man $(h_{0\,1} - h)$ im Vergleich mit $y$ weglassen und man kommt zu einer Annäherung, die bei $y = \infty$ eine präzise Lösung liefert:

$$\frac{w^2}{2\,g} - \frac{w_1^2}{2\,g} = y - \frac{1}{w_0} \int_0^y w\, d y.$$

Die Differenzierung dieser Gleichung nach $y$ liefert:

$$\frac{w\, d\, w}{g} = d\, y - \frac{w}{w_0}\, d\, y \qquad \text{oder} \qquad \frac{w_0\, d\, w}{w_0 - w} - d\, w = \frac{g}{w_0}\, d\, y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen $w$ und $y$ in differentialer Form. Das Integral der Gl. (36) lautet:

$$w_0 \int \frac{d\, w}{w_0 - w} - \int d\, w = - w_0 \ln (w_0 - w) - w + C = \frac{g}{w_0}\, y + C \quad . \quad . \quad (37).$$

Die Integrationskonstante $C$ ist dadurch bestimmt, daß $(w)_{y=0}\, w_1$ ist, woraus:

$$-w_0 \ln (w_0 - w_1) - w_1 = C$$

und

$$w_0 \ln (w_0 - w_1) + w_1 - w_0 \ln (w_0 - w) - w = w_0 \ln \frac{w_0 - w_1}{w_0 - w} + (w_1 - w) = \frac{g}{w_0}\, y \qquad (38).$$

Die Gl. (38) muß auch für $y = \infty$ gelten, folglich:

$$w_0 \ln \left(\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w}\right)_{y=\infty} + (w_1 - w)_{y=\infty} = w_0 \ln \left(\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_\infty}\right) + (w_1 - w_\infty) = \frac{g}{w_0}\, (y)_{y=\infty} = \infty \quad (39).$$

Dieses Resultat kann man aber erreichen, wenn die Versickerungsgeschwindigkeit am unteren, unendlich entfernten Ende der Stromsäule $(w)_{y=\infty} = w_\infty = w_0$ ist, d. h. diese Geschwindigkeit muß dem Koeffizienten der Darcyschen Formel gleich sein. Natürlich darf $y$ auch nicht negativ werden, was mit dem Zerreißen der Versickerungssäule und dem gänzlichen Austrocknen des Reservoirs gleichbedeutend wäre. Das analytische Merkmal dieser Bedingung wäre erstens

$$w_1 - w > 0\,, \qquad w_1 > w \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40).$$

Alsdann würde man einsehen, daß der Ausdruck $w_0 \ln \frac{w_0 - w_1}{w_0 - w}$ negativ werden könnte, wenn man weiter $(w_0 - w_1)$ und $(w_0 - w)$ positiv, d. h. $w_0 - w_1 > 0$ und $w_0 - w > 0$ gesetzt hätte. Folglich ist nur möglich $w_0 - w_1 < 0$ und $w_0 - w < 0$ und mit Rücksicht auf (40): $w_0 - w_1 < w_0 - w$, $w < w_1$, d. h. die Versickerungsstromsäule erweitert sich allmählich gegen das untere Ende, oder die Mantelfläche dieser Säule nähert sich asymptotisch der Mantelfläche eines zylinderartigen Körpers, laut Abb. 4. Was den Wert von $w_1$ d. i. der Versickerungsintensität am oberen Ende der Stromsäule nach unendlicher Zeit anbelangt, so dürfte dieselbe von dem Gesetze der Füllung des entsprechenden Reservoirs abhängen, wobei für natürliche Reservoire, Teiche, Seen usw. $t$ ganze geologische Perioden umfassen muß.

Je weniger $w_1$ von $w_\infty$ sich unterscheidet, desto schlanker wird die Stromsäule, und als ihre Grenzform kann ein Zylinder aufgefaßt werden. In diesem Falle wird $w = w_1 = w_0 = w_\infty$ und die Gl. (36) erscheint in der Form:

$$w_0\, d\, w - (w_0 - w)\, d\, w = \frac{g}{w_0}\, (w_0 - w)\, d\, y\,, \qquad w_0\, d\, w = 0\,, \qquad w = \text{konst.} = w_0.$$

814

# Über die Biegungsschwingungen einer Welle.

Von **F. H. van den DUNGEN** in Brüssel.

**1. Allgemeine Begriffe.** Ein vor kurzem erschienener Aufsatz von O. Föppl[1]) regt mich zu einigen Bemerkungen an. Die Biegungsschwingungszahlen einer Welle sind die Quadratwurzeln der Eigenwerte einer Integralgleichung, die wir folgendermaßen schreiben[2])

$$y_s = \omega^2 \int_\omega \alpha_{s\,x}\, m_x\, y_x\, d\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

mit den Bezeichnungen:

$x$ und $s$ zwei Abszissen der Welle,
$y_x$ und $y_s$ die Durchbiegungen in $x$ bzw. $s$,
$\omega : 2\pi$ sekundliche Biegungsschwingungszahl,
$m_x$ die spezifische Masse, in $x$,
$\alpha_{s\,x}$ die Einflußzahl (oder Greensche Funktion).

$\int_\omega$ bezeichnet die Summe aller Massen der Welle, d. h. der stetigen Massen $m_x\, d\,x$ und der punktförmigen Massen; die Summe setzt sich aus zwei Teilen eines Integrals von Stieltjes zusammen.

[1]) O. Föppl: »Berechnung der Biegungsschwingungszahl einer Welle . . .«, diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 72.

[2]) Wir vernachlässigen die Wirkung des Trägheitsmoments der Massen. Siehe dazu mein Buch: Cours de Technique des Vibrations. Revue de l'École Polytechnique, Bruxelles (Solboch).

Wir wählen von vornherein eine Durchbiegung $y_{0\,x}$ und rechnen eine Reihe $y_{1\,x}$, $y_{2\,x}$, $y_{3\,x}$, ... mit Hilfe der Rekursionsgleichungen

$$y_{n\,s} = \int_\omega \alpha_{s\,x}\, m_x\, y_{n-1\,x}\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Die niedrigste Biegungsschwingungszahl ist gegeben durch

$$\omega_1^{\,2} = \lim \frac{y_{n-1\,x}}{y_{n\,x}}, \qquad \text{für } n \to \infty \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

gültig für irgend ein $x$. Ebenso ist die zweite Zahl gegeben durch

$$\omega_1^{\,2}\, \omega_2^{\,2} = \lim \frac{y_{n-1}^{\;2}{}_x - y_{n\,x}\, y_{-2\,x}}{y_{n\,x}^{\;2} - y_{n+1\,x}\, y_{n-1\,x}}, \quad \text{usw.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Wir wollen aber die Folge $y_{0\,x}$, $y_{1\,x}$, $y_{2\,x}$, ... durch eine »mittlere« Folge $Y_0$, $Y_1$, $Y_2$, ... ersetzen, wo

$$Y_n = \int_\omega f(x)\, y_{n\,x}\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

nach einer Bemerkung von Schwarz.

Es ist zu bemerken, daß man sich bei der Ausführung mit $\omega_1^{\,2} \sim \frac{y_{1\,x}}{y_{2\,x}}$ und $\frac{Y_1}{Y_2}$ oder selbst $\omega_1^{\,2} \sim \frac{y_{0\,x}}{y_{1\,x}}$ und $\frac{Y_0}{Y_1}$ begnügen muß, wenn man glaubt, daß $y_{0\,x}$ in die Nähe der wahren Durchbiegung kommt.

Wie sollen wir nun $f(x)$ in Gl. (5) wählen? Die folgenden Betrachtungen mögen uns dazu führen: Wir haben nach Gl. (1)

$$\int_\omega m_s\, y_s^{\,2}\, ds = \omega^2 \int_\omega\!\int_\omega \alpha_{s\,x}\, m_s\, m_n\, y_s\, y_x\, ds\, dx \qquad \text{oder} \qquad \omega^2 = e/a\,,$$

wo

$$e = {}^1\!/_2 \int_\omega m_s\, y_s^{\,2}\, ds\,, \qquad a = {}^1\!/_2 \int_\omega\!\int_\omega \alpha_{s\,x}\, m_s\, m_x\, y_s\, y_x\, ds\, dx\,.$$

Man bemerke, daß $\omega^2 e$ die maximale kinetische Energie ist und $\omega^4 a$ das maximale Deformationspotential. Das Verhältnis von $e$ durch $a$ ist am kleinsten, wenn $y_x$ (und $y_s$) die wahren Durchbiegungen sind. Wählen wir die Annäherungen $y_{n-1\,x}$, so ist nach Gl. (2)

$$\omega_1^{\,2} < \frac{\int_\omega m_x\, y_{n-1}^{\;2}{}_x\, dx}{\int_\omega m_x\, y_{n\,x}\, y_{n-1\,x}\, dx} \equiv p_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Da in der Nähe einer Minimumstelle eine Funktion sich langsam verändert, sind die zwei Seiten fast gleich, und Gl. (6) ist identisch mit

$$\omega_1^{\,2} \sim \frac{Y_0}{Y_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

wenn $f(x) = m_x\, y_{n-1\,x}$.

Die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen ist

$$(E J_x\, y_x'')'' = m_x\, \omega^2\, y_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8);$$

nach dieser Gleichung haben wir [1])

$$\int_\omega (E J_x\, y_x'')''\, y_x\, dx = \omega^2 \int_\omega m_x\, y_x^{\,2}\, dx \qquad \text{oder} \qquad \omega^2 = \mathfrak{A}/e\,,$$

wo

$$\mathfrak{A} = {}^1\!/_2 \int_\omega (E J\, y_x'')''\, y_x\, dx$$

das maximale Deformationspotential ist. Das Verhältnis von $\mathfrak{A}$ durch $e$ ist am kleinsten, wenn $y_x$ die wahre Durchbiegung ist. Wählen wir die Durchbiegung $y_{n\,x}$, so ist

$$\omega_1^{\,2} < \frac{\int_\omega m_x\, y_{n\,x}\, y_{n-1\,x}\, dx}{\int_\omega m_x\, y_{n\,x}^{\;2}\, dx} \equiv q_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

da wir die Rekursionsgleichung (2) in der Form

$$(E J_x\, y_{n\,x}'')'' = m_x\, y_{n-1\,x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

schreiben können. Nun ist Gl. (9) wieder mit (7) identisch, wenn $f(x) = m_x\, y_{n\,x}$. Es ist leicht zu sehen, daß $q_n$ eine bessere Annäherung als $p_n$ ist, da nach der Schwarzschen Ungleichheit:

$$\int_\omega m_x\, y_{n\,x}^{\;2}\, dx \int_\omega m_x\, y_{n-1\,x}^{\;2}\, dx > \Big[\int_\omega m_x\, y_{n-1\,x}\, y_{n\,x}\, dx\Big]^2.$$

---

[1]) Bei der Ausführung ist der Einfluß der lokalen Massen zu beachten!

Wir haben auch $p_n < q_{n-1}$ für genug großes $n$. Es ist also

$$\omega_1^2 < \ldots < p_{n+1} < q_n < p_n < q_{n-1} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Oft genügt es, zu schreiben

$$\omega_1^2 < q_1 < p_1 \quad \ldots \ldots \quad (11\,a).$$

Um eine untere Grenze für $\omega_1^2$ zu bekommen, muß man die Zahl $A_m$ berechnen:

$$A_m = \int_\omega \ldots \int_\omega m_{x1}\, m_{x2} \ldots m_{x_m}\, \alpha_{x1\,x2}\, \alpha_{x2\,x3} \ldots \alpha_{x_{m-1}\,x_m}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m.$$

Wir haben [1]

$$A_m = \Sigma \frac{1}{\omega_i^{2m}}$$

und, da hier alle Zahlen $\omega_i^2$ positiv sind [2],

$$A_m^{\frac{-1}{m}} < A_{m+1}^{\frac{-1}{m+1}} < \ldots < \omega_1^2 \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Oft genügt es, zu schreiben

$$A_1^{-1} < \omega_1^2 \quad \ldots \ldots \quad (12\,a),$$

wo

$$A_1 = \int_\omega m_x\, \alpha_{xx}\, dx.$$

Die Ungleichheit (12a), mit dem Zeichen = geschrieben, ist die Dunkerleysche Gleichung.

Nun wollen wir noch in Gl. (11a) $p_1$ und $q_1$ mittels einer passenden Wahl von $y_{0x}$ vereinfachen.

**2. Beiderseits gelagerte Welle, ohne freitragendes Ende.** Wir nehmen $y_{0x}$ konstant an und setzen

$$y_{0x} = g \ldots (g = 9{,}81 \text{ m/sec}^{-2}) \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Dieser Wert $g$ genügt nicht den Auflagergleichungen und weicht dafür von der wahren Durchbiegung ab. Aber es folgt daraus kein großer Irrtum, da $\alpha_{sx}$ sehr klein ist, wenn $x$ eine Stelle dicht neben den Auflagern ist. Nun haben wir als erste Annäherung

$$y_{1s} = \int_\omega \alpha_{sx}\, m_x\, g\, dx \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

was identisch ist mit der statischen Durchbiegung unter dem Einflusse der Belastung $m_x g$. Wir haben also die Annäherung

$$\omega_1^2 \sim \frac{g}{y_{1M}} \quad \ldots \ldots \quad (14\,a),$$

wo $y_{1M}$ die größte statische Durchbiegung ist. Gl. (14a) ist die Baumannsche Gleichung. Richtiger sollten wir nach Gl. (11a)

$$\omega_1^2 < g \frac{\int_\omega m_x\, y_{1x}\, dx}{\int_\omega m_x\, y_{1x}^2\, dx} < g \frac{\int_\omega m_x\, dx}{\int_\omega m_x\, y_{1x}\, dx} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

schreiben. Diese Ungleichheiten sind beinahe Gleichheiten; sie lassen sich leicht berechnen, da $y_{1x}$ die statische Durchbiegung der Welle ist.

Zahlenbeispiel. Wir stellen nur drei Massen $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$ in Rechnung, die Durchbiegungen sind $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$. Wir werden annehmen, daß

$$m^{(1)} = m^{(3)} = 2, \qquad m^{(2)} = 1{,}5$$

und daß die Matrix der $\alpha_{xs}$

$$\begin{vmatrix} 3\,\alpha & 2\,\alpha & 1\,\alpha \\ 2\,\alpha & 4\,\alpha & 2\,\alpha \\ 1\,\alpha & 2\,\alpha & 3\,\alpha \end{vmatrix},$$

wo $\alpha$ eine Konstante ist.

Die Determinantegleichung der Schwingungen ist

$$\begin{vmatrix} 6\,\alpha\,\omega^2 - 1 & 3\,\alpha\,\omega^2 & 2\,\alpha\,\omega^2 \\ 4\,\alpha\,\omega^2 & 6\,\alpha\,\omega^2 - 1 & 4\,\alpha\,\omega^2 \\ 2\,\alpha\,\omega^2 & 3\,\alpha\,\omega^3 & 6\,\alpha\,\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (16);$$

die Wurzeln sind

$$\frac{1}{\omega_1^2} = 12\,\alpha, \quad \frac{1}{\omega_2^2} = 4\,\alpha, \quad \frac{1}{\omega_3^2} = 2\,\alpha \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

---

[1] Folgt aus der Theorie der Integralgleichungen mittels des auf die Determinantengleichung angewandten Gräffeschen Verfahrens.

[2] Es ist zu bemerken, daß sich bei Berücksichtigung des Einflusses der Trägheitsmomente negative Wurzeln ergeben können (im Falle der kritischen Geschwindigkeiten).

Wir haben nach Gl. (14)

$$y_1^{(1)} = y_1^{(3)} = 11\,\alpha\, g, \qquad y_1^{(2)} = 14\,\alpha\, g \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

und (15)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{g}\,\frac{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}\, dx}{\int\limits_\omega m_x\, dx} &= \frac{65}{5{,}5}\,\alpha = 11{,}818 \ldots x\,\alpha < \frac{1}{\omega_1^2} \\ \frac{1}{g}\,\frac{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}^2\, dx}{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}\, dx} &= \frac{778}{65}\,\alpha = 11{,}968 \ldots x\,\alpha < \frac{1}{\omega_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Die zweite Annäherung ist gegeben durch

$$y_2^{(1)} = y_2^{(3)} = 130\,\alpha^2 g, \qquad y_2^{(2)} = 172\,\alpha^2 g$$

und

$$\frac{\int\limits_\omega m_x\, y_{2x}^2\, dx}{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}\, y_{2x}\, dx} = \frac{111{,}976}{9{,}352}\,\alpha = 11{,}998 \ldots \alpha < \frac{1}{\omega_1^2}.$$

Die Dunkerleysche Gleichung liefert uns

$$\frac{1}{\omega_1^2} < A_1 = 18\,\alpha.$$

Besser ist

$$\frac{1}{\omega_1^2} < \sqrt{A_2} = \sqrt{164 \cdot \alpha^2} = 12{,}8 \ldots \alpha, \qquad \frac{1}{\omega_1^2} < \sqrt[4]{A_4} = \sqrt[4]{21008\,\alpha^4} = 12{,}0 \ldots \alpha \quad \text{usw.}$$

**3. Durchgehende Welle und Welle mit freitragendem Ende.** In diesen Fällen ist die Gl. (13) nicht mehr gültig, da Massen auftreten, die in entgegengesetzten Richtungen schwingen, so daß die wahre Durchbiegung nicht immer dasselbe Zeichen hat. Wenn wir die Welle von einem Ende an durchlaufen, so setzen wir

$$y_{0x} = \pm g \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20),$$

wobei das Zeichen jedesmal verändert werden soll, wenn wir über eine Stütze schreiten; daher wollen wir $+g$ und $-g$ in den ungeraden bzw. geraden Feldern setzen. Nun haben wir

$$y_{1s} = \int\limits_{\omega'} \alpha_{sx'}\, m_{x'}\, g\, dx' - \int\limits_{\omega''} \alpha_{sx''}\, m_{x''}\, g\, dx'' \quad \ldots \ldots \quad (21),$$

wo die Summen $\int\limits_{\omega'}$ und $\int\limits_{\omega''}$ sich auf die Gewichte der ungeraden bzw. geraden Felder beziehen. Wir bemerken, daß $y_{1s}$ nicht mehr die statische Durchbiegung ist, sondern die Durchbiegung unter dem Einflusse von positiven Gewichten in den ungeraden Feldern und von negativen Gewichten in den geraden Feldern.

Wollen wir die Durchbiegung der Welle unter dem Einflusse der Gewichte der Teile in den ungeraden Feldern berechnen, so ist

$$\overline{y}_{1s} = g \int\limits_{\omega'} \alpha_{sx'}\, m_{x'}\, dx';$$

ebenso ist die Durchbiegung der Welle unter dem Einflusse der Gewichte der Teile in den geraden Feldern, gegeben durch

$$\overline{\overline{y}}_{1s} = g \int\limits_{\omega''} \alpha_{sx''}\, m_{x''}\, dx'',$$

und die erste Annäherung $y_{1s}$ (21) ist die Differenz zwischen den zwei partiellen statischen Durchbiegungen:

$$y_{1s} = \overline{y}_{1s} - \overline{\overline{y}}_{1s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Die Gl. (11a) liefert uns

$$\omega_1^2 < g\,\frac{\int\limits_{\omega'} m_{x'}\, y_{1x'}\, dx' - \int\limits_{\omega''} m_{x''}\, y_{1x''}\, dx''}{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}^2\, dx} < g\,\frac{\int\limits_\omega m_x\, dx}{\int\limits_{\omega'} m_{x'}\, y_{1x'}\, dx' - \int\limits_{\omega''} m_{x''}\, y_{1x''}\, dx''} \quad . \quad (23).$$

Die oberen Grenzen von $\omega_1^2$ werden wir so ohne Schwierigkeit bekommen; die untere Grenze ist hier noch z. B. durch Gl. (12a) gegeben.

**Zahlenbeispiel:** Eine Welle besteht aus drei Feldern, von denen die zwei ersten durch drei Stützen abgegrenzt sind und das letzte ein freitragendes Ende ist. Wir stellen nun eine Masse in jedem Felde in Rechnung, nämlich

$$m^{(1)} = 2, \qquad m^{(2)} = 1{,}5, \qquad m^{(3)} = 2.$$

Die Matrix der $\alpha_{xs}$ ist

$$\left| \begin{array}{ccc} 3\,\alpha & -2\,\alpha & 1\,\alpha \\ -2\,\alpha & 4\,\alpha & -2\,\alpha \\ 1\,\alpha & -2\,\alpha & 3\,\alpha \end{array} \right| .$$

Man sieht leicht, daß die Determinantengleichung die Gl. (16) ist und daß die Wurzeln durch Gl. (17) gegeben werden. Nun haben wir

$$\left. \begin{array}{l} y_1^{(1)} = y_1^{(3)} = 2 \cdot 3\,\alpha + 2 \cdot 1\,\alpha - 1{,}5 \cdot (-2)\,\alpha = 11\,\alpha g \\ y_1^{(2)} = -2 \cdot 2\,\alpha - 2 \cdot 2\,\alpha - 1{,}5 \cdot 4\,\alpha = -14\,\alpha g \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Man muß die Verschiedenheit der Zeichen zwischen Gl. (18) und (24) beachten, aber weil wir z. B.

$$\frac{1}{g}\,\frac{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}{}^2\, d\,x}{\int\limits_{\omega'} m_{x'}\, y_{1x'}\, d\,x' - \int\limits_{\omega''} m_{x''}\, y_{1x''}\, d\,x''} \quad \text{statt} \quad \frac{1}{g}\,\frac{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}{}^2\, d\,x}{\int\limits_\omega m_x\, y_{1x}\, d\,x}$$

gebrauchen müssen, ist das Resultat dasselbe und wieder (siehe Gl. 19)

$$11{,}960\ldots\alpha < \frac{1}{\omega_1{}^2}$$

usw.

**4. Ueber die zweiten, dritten, . . . und höheren Schwingungszahlen.** Die Gl. (4) gibt uns das Mittel, die zweite Schwingungszahl zu berechnen; ähnliche Gleichungen gelten für die höheren Zahlen.

Für die erste Annäherung von $\omega_2{}^2$ müssen wir $y_{1x}$, $y_{2x}$, $y_{3x}$ berechnen, für die zweite noch $y_{4x}$, usw. Unser Zahlenbeispiel in **2.** liefert uns

$$\begin{array}{ll|ll} y_0^{(1)} = y_0^{(3)} & = g & y_0^{(2)} & = g \\ y_1^{(1)} = y_1^{(3)} & = 11\,\alpha g & y_1^{(2)} & = 14\,\alpha g \\ y_2^{(1)} = y_2^{(3)} & = 130\,\alpha_2 g & y_2^{(2)} & = 172\,\alpha_2 g \\ y_3^{(1)} = y_3^{(3)} & = 1\,556\,\alpha^3 g & y_3^{(2)} & = 2\,072\,\alpha^3 g \\ y_4^{(1)} = y_4^{(3)} & = 18\,664\,\alpha^4 g & y_4^{(2)} & = 24\,880\,\alpha^4 g \end{array}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Daher folgt genau

$$\frac{y_{2x}{}^2 - y_{3x}\,y_{1x}}{y_{1x}{}^2 - y_{2x}\,y_{0x}} = \frac{y_{3x}{}^2 - y_{4x}\,y_{2x}}{y_{2x}{}^2 - y_{3x}\,y_{1x}} = 24\,\alpha^2.$$

Nun scheinen die Gl. (5) falsch zu sein, da $24\,\alpha^2 = \omega_1{}^{-2}\,\omega_3{}^{-2}$; um dieses zu erklären, möge man sich des **Bestandteils** der Annäherungen erinnern. Die Reihe $y_{0x}, y_{1x}, y_{2x}, \ldots$ tritt bei der Auflösung der nicht homogenen Gleichung

$$y_s = \omega^2 \int\limits_\omega \alpha_{sx}\, m_x\, y_x\, d\,x + y_{0s}$$

auf, deren Lösung

$$y_x = y_{0x} + \omega^2\, y_{1x} + \omega^4\, y_{2x} + \ldots \qquad (\omega^2 < \omega_1{}^2)$$

oder

$$y_x = y_{0x} + \omega^2 \int\limits_\omega \frac{D\left(\begin{array}{c} x \\ s \end{array} \middle| \,\omega^2\right)}{D\,(\omega^2)}\, y_{0x}\, d\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ist. Die Durchbiegung $y_x$ mag unendlich werden, wenn $\omega^2$ eine Wurzel der Determinantengleichung

$$D\,(\omega^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

ist, d. h. einer Schwingungszahl entspricht. So hat man im allgemeinen die Wurzeln $\omega_i{}^2$, wenn man nach den Werten von $\omega^2$ die $y_x$ unendlich zu machen sucht. Aber es kann geschehen, daß, der Wahl von $y_{0x}$ gemäß, der Zähler der zweiten Seite von Gl. (25) für

eine Wurzel $\omega_i^2$ von (26) auch null ist. Alsdann ist $y_x$ nicht mehr unendlich für $\omega^2 = \omega_i^2$ und man muß die Wurzeln

$$\omega_1^2, \quad \omega_2^2, \ldots \omega_{i-1}^2, \quad \omega_{i+1}^2, \ldots$$

durch die Annäherungen berechnen. Das findet in unserem Beispiel statt zufolge der Symmetrie der Massen und Einflußzahlen und der Wahl von $y_{0x} = g$; so scheint es, daß es nur zwei Wurzeln $\omega_1^2$ und $\omega_3^2$ gibt.

Die Gl. (4) und Gl. (3) zeigen uns nicht die Richtung der Annäherung an; um Ungleichungen, ähnlich den Gl. (11) und (12), zu erlangen, müssen wir, wie folgt, rechnen. Die Gleichungen

$$z(x, s) = \sigma \int_\omega \int_\omega k(x, s;\, u, v)\, z(u, v)\, d\,u\, d\,v \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

und

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2}\left(E J_x \cdot E J_s \cdot \frac{\partial^4 z(x, s)}{\partial x^2 \partial s^2}\right) = \sigma\, m_x\, m_s\, z(x, s) \quad \ldots \ldots \quad (27\,\text{a})$$

mit denselben Randbedingungen wie Gl. (10) haben die Eigenwerte

$$\sigma_{ij} = \omega_i^2\, \omega_j^2 \qquad (i \neq j)$$

und Eigenfunktionen

$$\zeta(x, s) = \begin{vmatrix} \varphi_i(x) & \varphi_i(s) \\ \varphi_j(x) & \varphi_j(s) \end{vmatrix},$$

wo $\varphi_i$ die Eigenfunktion (oder Lösung) von Gl. (1) für $\omega^2 = \omega_i^2$ ist.

Der Kern von (27) ist

$$k(x, s;\, u, v) = \frac{1}{2}\, m_u\, m_v \begin{vmatrix} \alpha_{xu} & \alpha_{xv} \\ \alpha_{su} & \alpha_{sv} \end{vmatrix}.$$

Um die Eigenwerte mittels des Iterationsverfahrens zu berechnen, setzen wir

$$z_n(x, s) = \int_\omega \int_\omega k(x, s;\, u, v)\, z_{n-1}(u, v)\, d\,u\, d\,v \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

oder

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2}\left(E J_x \cdot E J_s \cdot \frac{\partial^4 z_n}{\partial x^2 \partial s^2}\right) = m_x\, m_s\, z_{n-1}(x, s) \quad \ldots \quad (28\,\text{a}).$$

Wir rechnen die Annäherung $z_n(x, s)$ mittels $y_{nx}$, indem wir setzen

$$z_n(x, s) = \begin{vmatrix} y_{nx} & y_{n+1\,x} \\ y_{ns} & y_{n+1\,s} \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Da $\sigma_{12} = \omega_1^2\, \omega_2^2$ der kleinste Eigenwert ist, so haben wir

$$\omega_1^2\, \omega_2^2 = \lim \frac{z_{n-1}(x, s)}{z_n(x, s)} \qquad n = \infty$$

für jeden $x$ und jeden $s$. Nun bemerken wir, daß

$$z(x, s) = -z(s, x) \quad \text{und} \quad z(x, x) = 0; \qquad z_n(x, s) = -z_n(s, x) \quad \text{und} \quad z_n(x, x) = 0$$

und

$$\omega_1^2\, \omega_2^2 = \lim_{s=x}\, \lim_{n=\infty} \frac{z_{n-1}(x, s)}{z_n(x, s)}.$$

Wir wollen die Grenzen des Produktes $\omega_1^2\, \omega_2^2$ wie die Grenzen von $\omega_1^2$ berechnen. Wir haben z. B.

$$\omega_1^2\, \omega_2^2 < \frac{\int_\omega \int_\omega z_n(x, s)\, z_{n-1}(x, s)\, m_x\, m_s\, d\,x\, d\,s}{\int_\omega \int_\omega z_n^2(x, s)\, m_x\, m_s\, d\,x\, d\,s} < \frac{\int_\omega \int_\omega z_{n-1}^2(x, s)\, m_x\, m_s}{\int_\omega \int_\omega z_n(x, s)\, z_{n-1}(x, s)\, m_x\, m_s\, d\,x\, d\,s} \quad (30).$$

Für eine beiderseits gelagerte Welle, ohne freitragendes Ende, ist

$$y_{0x} = y_{0s} = g; \qquad z_0(x, s) = g\,(y_{1s} - y_{1x}); \qquad z_1(x, s) = (y_{1x}\, y_{2s} - y_{2x}\, y_{1s})$$

und daher z. B.

$$\omega_1^2\, \omega_2^2 < g\, \frac{M \int_\omega m_x\, y_{1x}^2\, d\,x - \left(\int_\omega m_x\, y_{1x}\, d\,x\right)^2}{\int_\omega m_x\, y_{1x}\, d\,x \cdot \int_\omega m_x\, y_{1x}\, y_{2x}\, d\,x - \int_\omega m_x\, y_{1x}^2\, d\,x \cdot \int_\omega m_x\, y_{2x}\, d\,x}, \quad \text{usw.} \quad (31),$$

wo $M$ die Masse der Welle ist. Man bemerke, daß es für Gl. (31) genügt, $y_{1x}$ und $y_{2x}$ zu berechnen, was für die erste Annäherung von Gl. (4) nicht gilt.

**Für das Produkt $\omega_1{}^2\,\omega_2{}^2\,\omega_3{}^2$ haben wir**

$$\omega_1{}^2\,\omega_2{}^2\,\omega_3{}^2 = \lim \frac{\begin{vmatrix} y_{n\,x} & y_{n+1\,x} & y_{n+2\,x} \\ y_{n-1\,x} & y_{n\,x} & y_{n+1\,x} \\ y_{n-2\,x} & y_{n-1\,x} & y_{n\,x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{n+1\,x} & y_{n+2\,x} & y_{n+3\,x} \\ y_{n\,x} & y_{n+1\,x} & y_{n+2\,x} \\ y_{n-1\,x} & y_{n\,x} & y_{n+1\,x} \end{vmatrix}} \quad (n \to \infty) \quad . \; . \; . \quad (32).$$

Wir benutzen auch die Gleichung

$$z(x, s, t) = \tau \int_\omega \int_\omega \int_\omega k(x, s, t;\, u, v, w)\, z(u, v, w)\, du\, dv\, dw \quad . \; . \; . \quad (33)$$

mit

$$k(x, s, t;\, u, v, w) = \frac{1}{6}\, m_u\, m_v\, m_w \begin{vmatrix} \alpha_{x\,u} & \alpha_{x\,v} & \alpha_{x\,w} \\ \alpha_{s\,u} & \alpha_{s\,v} & \alpha_{s\,w} \\ \alpha_{p\,u} & \alpha_{p\,v} & \alpha_{p\,w} \end{vmatrix}.$$

Nun sind die Eigenwerte $\tau = \omega_i{}^2\,\omega_j{}^2\,\omega_k{}^2 \quad (i \neq j \neq k)$.

Zuletzt, um die höheren Schwingungszahlen zu berechnen, können wir die asymptotischen Werte dieser Zahlen mit Hilfe der Weylschen und Courantschen Gleichungen abschätzen [1]. 806

# Vektoranalyse der komplanen Bewegung eines ebenen starren Systems.

Von **EMIL WAELSCH** in Brünn.

»Lesen in den Gleichungen.« Plücker. Siehe F. Klein, Vorl. über höhere Geometrie, S. 16.

Unter Verwendung der Vektorrechnung lassen sich die Sätze und Konstruktionen der komplanen Bewegung eines ebenen starren Systems leicht ableiten. Hierbei wird die Relativ- ebenso wie die Führungsbewegung gegeben durch infinitesimale Translation und Rotation, wodurch die Formeln an Symmetrie gewinnen. Die verschiedenen Affinitäten, die bei den Beschleunigungen auftreten, insbesondere die Burmestersche [2], werden nachgewiesen, und für die graphische Dynamik grundlegende Sätze Wittenbauers [3] und Pöschls [4] in einfacher Weise abgeleitet.

Ein von dem Bezugspunkt $\mathfrak{O}$ ausgehender Vektor und sein Endpunkt seien mit demselben deutschen Buchstaben bezeichnet. Aus der Vektorrechnung der Ebene werde folgendes verwendet. Die Ebene sei die $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}$-Ebene eines Cartesischen Raumrechtskoordinatensystems mit den Achseneinheitsvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$. Der Vektor $\mathfrak{a}$ dieser Ebene wird im positiven Sinne um $90^0$ in den Vektor $\mathfrak{k} \times \mathfrak{a}$ gedreht [5], der mit $\mathfrak{a}'$ bezeichnet sei (gelesen: »$\mathfrak{a}$ gedreht« oder »$\mathfrak{a}$ Komma«). Es ist also:

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{k} \times (\mathfrak{k} \times \mathfrak{a}) = -\,\mathfrak{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a),$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}' = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{k} \times \mathfrak{b}) = -\,(\mathfrak{k} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = -\,\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b).$$

Bei der Drehstreckung in der $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}$-Ebene um $\mathfrak{O}$ im positiven Sinn durch den Winkel $\varphi$ und mit dem positiven Streckungsverhältnis $\tau$ übergeht der Vektor $\mathfrak{x}$ in den Vektor $\mathfrak{x}'$:

$$\mathfrak{x}' = \tau \cos\varphi\, \mathfrak{x} + \tau \sin\varphi\, \mathfrak{x}' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c).$$

Hierfür kann auch geschrieben werden:

$$\mathfrak{x}' = a\,\mathfrak{x} + b\,\mathfrak{x}' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d),$$

wo jetzt $a, b$ beliebig sind, und [6]: $\tau = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = b\,\bar{a}$.

[1] R. Courant »Zur Theorie der kleinen Schwingungen«, diese Zeitschr. Bd. 2 (1922), S. 285. — Courant-Hilbert »Methoden der mathematischen Physik« Bd. 1.

[2] L. Burmester, Kinematik. Leipzig (1888), S. 818.

[3] F. Wittenbauer, Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 36, S. 231, Bd. 40, S. 91, 151, 279 und Graph. Dynamik, Berlin (1925).

[4] Th. Pöschl, Ztschr. f. Math u. Phys. Bd. 58, S. 156, Bd. 60, S. 144 und Wittenbauer, Graph. Dynamik, S. 62 ff.

[5] Dieser »gedrehte« Vektor (»gedrehte Geschwindigkeit«) wird seit langem in der Kinematik verwendet. Bei Verwendung komplexer Zahlen wird er durch Multiplikation mit $i$ gegeben (s. Schell, Marcolongo u. a. Wittenbauer bezeichnet ihn ohne prinzipielle Einführung komplexer Zahlen mit $i\mathfrak{a}$).

[6] Es soll $1/a = \bar{a}$ gesetzt werden.

Die Inverse der Drehstreckung hat die Gleichung

$$\mathfrak{x} = (a\,\mathfrak{x}' - b\,\mathfrak{x}'')\,\overline{a^2 + b^2} \quad \ldots \ldots \quad \text{(d')};$$

denn wird $\mathfrak{x}$ hieraus in (d) eingesetzt, so gibt (a): $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}'$. (d') ist auch die Lösung von (d) nach $\mathfrak{x}$.

Der Vektor $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ wird durch den Punkt

$$(\mu\,\mathfrak{a} + \nu\,\mathfrak{b})\,\overline{\mu + \nu} \quad \ldots \ldots \quad \text{(e)}$$

im Verhältnis $\nu\,\overline{\mu}$ geteilt. Die Vektortripel $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$ mit

$$\mathfrak{c} = \mu\,\mathfrak{a} + \nu\,\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{c}' = \mu\,\mathfrak{a}' + \nu\,\mathfrak{b}' \quad \ldots \ldots \quad \text{(f)}$$

sind affin. Die Geraden $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'$ schneiden bzw. die Vektorgeraden $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ in den Punkten $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$, und diese teilen die Vektoren $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'$ in demselben Verhältnis $\nu\,\overline{\mu}$ und $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ in dem Verhältnis $\overline{\mu + \nu}$, weshalb

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{S} = \overline{(\mu + \nu)}\,\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{D}'\,\mathfrak{S}' = \overline{(\mu + \nu)}\,\mathfrak{c}' \quad \ldots \ldots \quad \text{(g)}.$$

Es wird der reziproke Vektor $\overline{\mathfrak{a}} = \overline{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}$ des Vektors $\mathfrak{a}$ eingeführt, so daß $\overline{\sigma\,\mathfrak{a}} = \overline{\sigma}\,\overline{\mathfrak{a}}$.

Anwendungen. a) Die drei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ liegen in einer Geraden, wenn $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}' + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}' + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}' = 0$.

b) Die Längs- und Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \overline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}'\,\overline{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} \cdot \overline{\mathfrak{a}'}\,\mathfrak{a}'$.

c) Hat der Punkt $\mathfrak{x}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung $\mathfrak{g}$, so ist die Normalkomponente $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{g}$ gegeben durch: $\mathfrak{g} \cdot \overline{\mathfrak{v}'}\,\mathfrak{v}'$. Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{M}$ der Krümmungsvektor, wobei $\mathfrak{M}$ der Krümmungsmittelpunkt, so ist bekanntlich der reziproke Krümmungsvektor $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}\,\overline{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}}$, so daß

$$\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{v}'\,\overline{\mathfrak{v}'} \quad \ldots \ldots \quad \text{(h)}.$$

Für die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ mit $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{g} = \ddot{\mathfrak{x}}$, ist hieraus: $\overline{\mathfrak{m}} = \ddot{\mathfrak{x}} \cdot \dot{\mathfrak{x}}'\,\overline{\dot{\mathfrak{x}}'}$.

**1. Bewegung im Raume.** Für das bewegte räumliche System $\Sigma$ seien $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{r}$ dessen infinitesimale Translation bzw. Rotation um $\mathfrak{D}$. Dann ist die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes $\mathfrak{x}$ bezogen auf $\Sigma$ gegeben durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^f\,[= \mathfrak{t} + \mathfrak{r} \times \mathfrak{x}] + \dot{\mathfrak{x}} \quad \ldots \ldots \quad \text{(I)},$$

wo $\mathfrak{v}^f$ die Führungs- und $\dot{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{x}/dt$ die Relativgeschwindigkeit bzw. $\Sigma$ ist.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor in $\Sigma$, so ist nach dem Satz von Bour[1]) die absolute Aenderungsgeschwindigkeit von $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{a} + \dot{\mathfrak{a}}.$$

Wird hier $\mathfrak{a} = \mathfrak{v}$ gesetzt, so ergibt sich die absolute Beschleunigung $\mathfrak{g}$ des Punktes $\mathfrak{x}$ bezogen auf $\Sigma$ als:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} &= [\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} = (\mathrm{I}) = \mathfrak{r} \times \mathfrak{t} + \mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{x}}] + [\dot{\mathfrak{v}} = \dot{\mathfrak{t}} + \dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{x}} + \ddot{\mathfrak{x}}] \\ &= \mathfrak{r} \times \mathfrak{t} + \dot{\mathfrak{t}} + \mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{x}) + \dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{x} + \ddot{\mathfrak{x}} + 2\,\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{x}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}.$$

Hier geben die vier ersten Glieder die Führungs-, das 5. die Relativbeschleunigung bzw. $\Sigma$ und das letzte die Coriolisbeschleunigung.

Ebene Bewegung. Ist $\mathfrak{k}$ im Raume fest und sind die Vektoren $\mathfrak{t}, \mathfrak{x}$ senkrecht $\mathfrak{k}$, die Rotation $\mathfrak{r}$ gleich $\omega\,\mathfrak{k}$, so kann die Bewegung als eben angesehen werden. Nach (I, II) ist dann

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{t} + \omega\,\mathfrak{k} \times \mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{t} + \omega\,\mathfrak{x}' + \dot{\mathfrak{x}} \quad \ldots \ldots \quad \text{(1)},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \omega\,\mathfrak{k} \times \mathfrak{t} + \dot{\mathfrak{t}} + \omega^2\,\mathfrak{k} \times (\mathfrak{k} \times \mathfrak{x}) + \dot{\omega}\,(\mathfrak{k} \times \mathfrak{x}) + \ddot{\mathfrak{x}} + 2\,\omega\,\mathfrak{k} \times \dot{\mathfrak{x}} \\ &=^{2)}\ \omega\,\mathfrak{t}' + \dot{\mathfrak{t}} - \alpha^2\,\mathfrak{x} + \gamma\,[= \dot{\omega}]\,\mathfrak{x}' + \ddot{\mathfrak{x}} + 2\,\omega\,\dot{\mathfrak{x}}' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(2)}.$$

**2. Die Pole.** Die Relativgeschwindigkeit $\dot{\mathfrak{x}}$ ist gegeben durch eine infinitesimale Bewegung als[3]):

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{x} = \mathfrak{t}_1 + \omega_1\,\mathfrak{x}' \quad \ldots \ldots \quad \text{(3)}.$$

---

[1]) Vergl. G. Koenigs, Cinématique, Paris (1897), S. 129 ff., G. Hamel, El. d. Mechanik, Leipzig (1912), S. 405 ff.

[2]) Aus dieser Darstellung von $\mathfrak{g}$ können leicht bekannte Konstruktionen abgeleitet werden, so die der Beschleunigung des Punktes $\mathfrak{x}$, wenn die Krümmung eines Punktes $\mathfrak{y}$ für seine Bahnkurve bekannt ist (s. etwa W. Hartmann, Maschinengetriebe, Stuttgart und Berlin (1913), S. 329) oder die Beschleunigung bei Dreistab- und Schubgetrieben.

[3]) Die infinitesimale Drehung dieser Bewegung könnte auch um einen Punkt $\mathfrak{c}$ erfolgen; dann würde sie lauten: $\mathfrak{t}' + \omega_1\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{c})' = (\mathfrak{t}' - \omega_1\,\mathfrak{c}') + \omega_1\,\mathfrak{x}'$. Es kann aber, wie es oben geschieht, $\mathfrak{t}' - \omega_1\,\mathfrak{c}'$ durch $\mathfrak{t}_1$ ersetzt werden.

Wird gesetzt $\mathfrak{t} + \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_a$, $\omega + \omega_1 = w$, so gibt (1):

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{t}_a + w\,\mathfrak{x}', \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{t}_a' - w\,\mathfrak{x} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Für den Drehpol $\mathfrak{D}$ der absoluten Bewegung ist $\mathfrak{v} = 0$, daher ist nach (4):

$$\mathfrak{D} = \overline{w}\,\mathfrak{t}_a', \quad \overline{\mathfrak{D}} = -\overline{w}\,\mathfrak{t}_a \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$\mathfrak{v} = w\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{D})', \quad \mathfrak{v}' = -w\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{D}) \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Verschwinden hier $\mathfrak{t}_1$, $w_1$ bzw. $\mathfrak{t}$, $\omega$, so liegt die Führungs- bzw. Relativbewegung vor, deren Drehpole daher sind:

$$\mathfrak{d} = \overline{\omega}\,\mathfrak{t}', \quad \mathfrak{d}_1 = \overline{\omega_1}\,\mathfrak{t}_1 \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

$$\mathfrak{D} = (5) = \overline{\omega + \omega_1}\,(\omega\,\mathfrak{d} + \omega_1\,\mathfrak{d}_1) \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

4. Aus (3) ist die Relativbeschleunigung

$$\mathfrak{x}^{\cdot\cdot} = (\mathfrak{t}_1 + \omega_1\,\mathfrak{x}')^{\cdot} = (3) = \mathfrak{t}_1 + \gamma_1\,\mathfrak{x}' + \omega_1\,\mathfrak{t}_1' - \omega_1^2\,\mathfrak{x} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Daher ist nach (2) die absolute Beschleunigung, wenn: $\gamma + \gamma_1 = g$, $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d} = \mathfrak{q}$

$$\mathfrak{g} = w\,(\mathfrak{t}_a' - w\,\mathfrak{x}) + g\,\mathfrak{x}' + \omega\,\mathfrak{t}_1' - \omega_1\,\mathfrak{t}' + \mathfrak{t}_a^{\cdot} = (4) \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

$$= \omega\,\mathfrak{v}' + g\,\overline{w}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

$$= -w^2(\mathfrak{x} - \mathfrak{D}) + g\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{D})' + \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

$$\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} = -g\,\overline{\omega}\,\mathfrak{t}_a + \omega\,\mathfrak{t}_1' - \omega_1\,\mathfrak{t}' + \mathfrak{t}_a^{\cdot} = (5) = \omega\,\omega_1\,\mathfrak{q} + g\,\mathfrak{D}' + \mathfrak{t}_a^{\cdot} \quad \ldots \quad (13),$$

wo $\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}$ die absolute Beschleunigung des Drehpoles $\mathfrak{D}$ ist; denn für $\mathfrak{D}$ verschwinden $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$ in (11)[1].

Für einen Punkt $\mathfrak{x}$ mit verschwindender Normal- bzw. Tangentialbeschleunigung ist nach (11)

$$\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{v}' = w\,\mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{v}' + \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{v}' = (6) = w^3(\mathfrak{x} - \mathfrak{D})^2 - w\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{D}) = 0,$$

$$\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{v} = \overline{w}\,g\,\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} + \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{v} = (6) = w\,g\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{D})^2 - w\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}' \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{D}) = 0.$$

Er liegt daher auf dem Wende- bzw. Tangentialkreis mit bzw. der Gleichung

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{D})^2 - \overline{w^2}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{D}) = 0, \quad (\mathfrak{x} - \mathfrak{D})^2 - \overline{g}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}' \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{D}) = 0 \quad \ldots \quad (14),$$

welche Kreise daher durch $\mathfrak{D}$ gehen und durch den zu $\mathfrak{D}$ diametralen Wendepol $\mathfrak{J}$ bzw. Tangentialpol $\mathfrak{H}$ mit den Ortsvektoren

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{D} + \overline{w^2}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{D} + \overline{g}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}' \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

Daher ist auch $\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} = w^2(\mathfrak{J} - \mathfrak{D}) = g\,(\mathfrak{D} - \mathfrak{H})'$ und nach (12):

$$\mathfrak{g} = w^2(\mathfrak{J} - \mathfrak{x}) + g\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{D})' = w^2(\mathfrak{D} - \mathfrak{x}) + g\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{H})' \quad \ldots \quad (16).$$

Wird $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{D}$ verlegt, also $\mathfrak{D} = 0$, so werden die Kreisgleichungen (14)

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} - \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} - \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{x} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (14').$$

Die Polwechselgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ kann bekanntlich wie folgt bestimmt werden. Ist $\mathfrak{D}'$ der Drehpol für das zweite Zeitelement $dt$, so ist $\mathfrak{u} = \mathfrak{D}\mathfrak{D}'/dt$. In diesem Element hat $\mathfrak{D}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}\,dt$, und es dreht sich $\Sigma$ um $\mathfrak{D}'$ mit der Winkelgeschwindigkeit $w + dw$; daher ist $\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} = (w + dw)\,[(\mathfrak{D}'\mathfrak{D})'/dt = -\mathfrak{u}']$, so daß

$$\mathfrak{u} = \overline{w}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}' \;{}^{2)} \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

---

[1]) Diese und die abzuleitende Formel vereinfachen sich, falls der Drehpol $\mathfrak{D}$ als Bezugspunkt gewählt wird, da dann $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{P}' = 0$.

[2]) Für eine ebene Bewegung, die durch $\mathfrak{t}, w$ gegeben ist, und für welche daher nach (4, 5, 13, 15) gilt:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{t} + w\,\mathfrak{x}', \quad \mathfrak{D} = \overline{w}\,\mathfrak{t}', \quad \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{t}^{\cdot} - g\,\overline{w}\,\mathfrak{t}, \quad \mathfrak{J} = \mathfrak{D} + \overline{w^2}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}},$$

kann die Polwechselgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ direkt bestimmt werden als

a) Relativgeschwindigkeit des Drehpols $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{D}^{\cdot} = \overline{w}\,(\mathfrak{t}^{\cdot\prime} - g\,\overline{w}\,\mathfrak{t}') = \overline{w}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}';$$

b) absolute Geschwindigkeit des Drehpols:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{t} + \frac{d\,\mathfrak{D}}{d\,t} = \mathfrak{t} + w\,\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}^{\cdot} = \mathfrak{D}^{\cdot} = \overline{w}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}';$$

c) gleich der absoluten Geschwindigkeit des Wendepols $\mathfrak{J}$:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v}/_{\mathfrak{x}=\mathfrak{J}} = \mathfrak{t} + w\,\mathfrak{D}' + w\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}' = \overline{w}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}.$$

Für den **Beschleunigungspol** $\mathfrak{G}$, dessen Beschleunigung verschwindet, ergibt (12):

$$\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} = w^2(\mathfrak{G} - \mathfrak{D}) - g(\mathfrak{G} - \mathfrak{D})' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

so daß nach $(d')$: $\mathfrak{G} - \mathfrak{D} = [w^4(\mathfrak{J} - \mathfrak{D}) + g^2(\mathfrak{H} - \mathfrak{D})]\,\overline{w^4 + g^2 = \vartheta^2}$ also:

$$\mathfrak{G} = (15) = (w^4\,\mathfrak{J} + g^2\,\mathfrak{H})\,\overline{\vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19);$$

daher $\mathfrak{G}$ nach $(d)$ den Vektor $\mathfrak{J}\,\mathfrak{H}$ im Verhältnis $\varkappa^2$ teilt, wobei $\varkappa = g\,\overline{w^2}$ ist.

Nach (12, 15, 18) ist noch:

$$\mathfrak{g} = -w^2(\mathfrak{x} - \mathfrak{G}) + g(\mathfrak{x} - \mathfrak{G})' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{G} - \varkappa\,\mathfrak{G}' + \varkappa\,\mathfrak{D}', \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \overline{\varkappa}\,\mathfrak{G}' - \overline{\varkappa}\,\mathfrak{D}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

**3. Die Formel von Euler-Savary** [1]**.** Der Punkt $\mathfrak{x}$ bewege sich relativ auf der Kurve $C_r$ oder $\mathfrak{x}(t)$. Seine Relativgeschwindigkeit und -beschleunigung sind $\mathfrak{x}^{\cdot}$ bzw. $\mathfrak{x}^{\cdot\cdot}$. Die Kuve $C_r$ hüllt die Kurve $C_a$. $\mathfrak{m}_r$, $\mathfrak{m}_a$ seien die Krümmungsvektoren und $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{m}_r + \mathfrak{x}$, $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{m}_a + \mathfrak{x}$ die Krümmungsmittelpunkte dieser Kurven für $\mathfrak{x}$.

Hat $\mathfrak{x}$ die absolute Geschwindigkeit und Beschleunigung $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{g}$, so ist nach (11) $\mathfrak{g} \cdot \overline{\mathfrak{v}'} = w + \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{v}'}$; daher ist nach $(h)$

$$\mathfrak{m}_a = (\overline{w + \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{v}'}})\,\overline{\mathfrak{v}'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{k}).$$

Wird nun der Bezugspunkt in den Drehpol $\mathfrak{D}$ verlegt, so ist nach (6, 11, 17) $\mathfrak{v} = w\,\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{v}' = -w\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{g} \cdot \overline{\mathfrak{v}'} = w - \mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'}$. Daher ist nach (k)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}_a &= (\overline{w - \mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'}})\,\overline{\mathfrak{v}'} = (\overline{w\,\mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'} - 1})\,\overline{\mathfrak{x}} \\ \mathfrak{m}_a &= \overline{w\,\mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'} - 1}\,\overline{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{M}_a = \mathfrak{m}_a + \mathfrak{x} = \overline{w}\,\mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'}\,\overline{w\,\mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'} - 1}\,\overline{\mathfrak{x}} \\ \overline{\mathfrak{M}_a} &= \overline{\mathfrak{m}_a} + \overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x}} - \overline{w}\,\overline{\mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'}}\,\overline{\mathfrak{x}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{l}).$$

Hieraus ergibt sich $\mathfrak{M}_r$, indem $\omega_1$ statt $w = \omega + \omega_1$ gesetzt wird; denn für die Relativbewegung ist die Polwechselgeschwindigkeit auch $\mathfrak{u}$, und die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega_1$. Daher

$$\overline{\mathfrak{M}_r} = \overline{\mathfrak{m}_r} + \overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x}} - \overline{\omega_1}\,\overline{\mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'}}\,\overline{\mathfrak{x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{m}).$$

Demnach: $\overline{\mathfrak{M}_a} - \overline{\mathfrak{M}_r} = -\overline{\omega}\,\overline{\mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{x}'}}\,\overline{\mathfrak{x}}$ oder da: $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{x}' = -\mathfrak{u}' \cdot \mathfrak{x}$ auch $(\overline{\mathfrak{M}_a} - \overline{\mathfrak{M}_r}) \cdot \mathfrak{u}' = \omega$; folglich:

$$(\overline{\mathfrak{M}_a} - \overline{\mathfrak{M}_r}) \cdot \mathfrak{u}'\,\mathfrak{u}' = \omega\,\mathfrak{u}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{n}).$$

D. h. (nach b), S. 232): Die Längskomponente von $\overline{\mathfrak{M}_a} - \overline{\mathfrak{M}_r}$ für $\mathfrak{u}'$ oder die Polkurvennormale ist: $\omega\,\mathfrak{u}'$.

Aus (l) ergibt sich der **reziproke** Krümmungsvektor der festen Polkurve, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{u}$ ersetzt werden:

$$\overline{\mathfrak{m}_f} = (w - \mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{D}'})\,\mathfrak{u}'.$$

Wird hier $\omega_1$ statt $w$ gesetzt, so erhält man für die bewegliche Polkurve:

$$\overline{\mathfrak{m}_b} = (\omega_1 - \mathfrak{u} \cdot \overline{\mathfrak{D}'})\,\mathfrak{u}',$$

also

$$\overline{\mathfrak{m}_f} - \overline{\mathfrak{m}_b} = \omega\,\mathfrak{u}'.$$

Vermöge (n) ergibt sich demnach die Formel von **Euler-Savary** in der Gestalt:

$$(\overline{\mathfrak{M}_a} - \overline{\mathfrak{M}_r}) \cdot \mathfrak{u}'\,\mathfrak{u}' = \overline{\mathfrak{m}_f} - \overline{\mathfrak{m}_b},$$

d. h. die Längskomponente des Vektors $\overline{\mathfrak{M}_a} - \overline{\mathfrak{M}_r}$ für die Polkurvennormale $\mathfrak{u}'$ ist konstant $= \overline{\mathfrak{m}_f} - \overline{\mathfrak{m}_b}$.

**4. Affinitäten.** Es soll nun der Punkt $\mathfrak{x}$ als Bezugspunkt gewählt werden. Dann ergeben sich aus (12, 16, 20) die folgenden Darstellungen für die Beschleunigung $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{x}$:

$$\mathfrak{g} - \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}} = w^2\,\mathfrak{D} - g\,\mathfrak{D}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

$$\mathfrak{g} = w^2\,\mathfrak{J} - g\,\mathfrak{D}' = w^2\,\mathfrak{D} - g\,\mathfrak{H}' = w^2\,\mathfrak{G} - g\,\mathfrak{G}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Die erste und letzte dieser Darstellungen sagen nach (d) aus, daß $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}$ bzw. $\mathfrak{g}$ aus den Vektoren $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{G}$ durch dieselbe Drehstreckung mit $\operatorname{tg}\varphi = -g\,\overline{w^2} = -\varkappa$, $\tau = \sqrt{w^4 + g^2}$

[1] Vgl. hierzu **Koenigs**, a. a. O. S. 143 ff.

hervorgeht; die zweite zerlegt $\mathfrak{g}$ in die Wendebeschleunigung $w^2 J$ und die Triebbeschleunigung $-g\,\mathfrak{D}'$ Grüblers; die dritte gibt die Zerlegung Schells.

Vermöge dieser Darstellungen sind nach (f), da die $w^2$, $g$ zu derselben Zeit für alle Punkte von $\Sigma$ dieselben sind, die **Vektortripel** $\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'(\mathfrak{g}-\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}})$, $\mathfrak{J}\,\mathfrak{D}'\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{D}\,\mathfrak{H}'\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}'\,\mathfrak{g}$ **zu einander affin.** Die 1. und die 4. dieser Affinitäten sind die eben genannte Drehstreckung, die 2. ist die Burmestersche. Sie geben wohl die einfachsten Lösungen der Aufgabe: Der Geschwindigkeitszustand von $\Sigma$ und die absolute Beschleunigung eines Punktes von $\Sigma$ sind gegeben, ferner bzw. 1. Beschleunigungspol, 2. Beschleunigung des Drehpols, 3. Wende-, 4. Tangentialpol; die absolute Beschleunigung eines anderen Punktes ist zu konstruieren [1]).

Die vier Vektortripel sind auch untereinander affin [2]), und die 3 letzten derselben haben den gemeinsamen Vektor $\mathfrak{g}$ als sich selbst entsprechend. Daher fallen (siehe den Schluß der Einl.) die Punkte $\mathfrak{C}$ dieser Tripel zusammen; die dortigen Verhältnisse werden hier $\nu\mu=-g\,w^2=-\varkappa$, $\mu+\nu=w^2-g$, und daher $\mathfrak{g}=(w^2-g)\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{C}$. Hieraus folgt, daß, wie selbstverständlich, die Dreiecke $\mathfrak{J}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}'\,\mathfrak{H}'\,\mathfrak{G}'$ homothetisch sind, daß sie aber auch als Homothetiezentrum den Punkt $\mathfrak{C}$ auf der Geraden von $\mathfrak{g}$ besitzen. Oder: Die Vektoren $\mathfrak{J}\,\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'\,\mathfrak{H}'$ haben parallele Geraden und die Geraden $\mathfrak{J}\,\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}\,\mathfrak{H}'$ schneiden sich in dem Punkt $\mathfrak{C}$; analoges für die Vektoren $\mathfrak{D}\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}'\,\mathfrak{G}'$ oder $\mathfrak{D}\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}'\,\mathfrak{G}'$. Aus (23) ist auch, wenn $\mathfrak{X}=\mu\,\mathfrak{J}+\nu\,\mathfrak{D}+\varrho\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Y}=\mu\,\mathfrak{D}+\nu\,\mathfrak{H}+\varrho\,\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{g}=w^2\,\mathfrak{X}-g\,\mathfrak{Y}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

mit $\mu+\nu+\varrho=1$, wo jetzt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}'$ Punkte sind, die sich in der obigen Homothetie entsprechen.

**5. Sätze Wittenbauers.** Für die Führungs- bzw. Relativbeschleunigung verschwinden $\mathfrak{t}_1, \omega_1$ bzw. $\mathfrak{t}, \omega$; daher sind nach (10) die Beschleunigungen der Drehpole $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1$ dieser Bewegungen bzw. $\mathfrak{g}_{\mathfrak{d}}{}^f=\mathfrak{t}^{\cdot}+\gamma\,\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{g}_{\mathfrak{d}_1}{}^r=\mathfrak{t}_1^{\cdot}+\gamma_1\,\mathfrak{d}_1'$, so daß (13) ergibt

$$\mathfrak{g}_{\mathfrak{d}}=\omega\,\omega_1\,\mathfrak{q}+\mathfrak{g}_{\mathfrak{d}}{}^f+\mathfrak{g}_{\mathfrak{d}_1}{}^r-(\omega\,\gamma_1-\omega_1\,\gamma)\,\mathfrak{q}'\,w.$$

Nach (15) ist für die Wende- bzw. Tangentialpole dieser Bewegungen

$$\mathfrak{g}_{\mathfrak{d}}{}^f=\omega^2(\mathfrak{J}^f-\mathfrak{d}),\ \mathfrak{g}_{\mathfrak{d}_1}{}^r=\omega_1{}^2(\mathfrak{J}^r-\mathfrak{d}_1),\ \mathfrak{g}_{\mathfrak{d}}{}^{f'}=\gamma\,(\mathfrak{H}^f-\mathfrak{d}),\ \mathfrak{g}_{\mathfrak{d}}{}^{r'}=\gamma_1\,(\mathfrak{H}^r-\mathfrak{d}_1).$$

Daher folgen die fraglichen Sätze Wittenbauers vermöge (15, 24) in der Form (mit $w=\omega+\omega_1$, $g=\gamma+\gamma_1$, $\mathfrak{q}=\mathfrak{d}_1-\mathfrak{d}$):

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}&=w^2\,(\omega^2\,\mathfrak{J}^f+\omega_1{}^2\,\mathfrak{J}^r+2\,\omega\,\omega_1\,\mathfrak{d}_1)\,(\omega\,\gamma_1-\omega_1\,\gamma)\,\overline{w^3}\,\mathfrak{q}'\\ \mathfrak{H}&=\overline{g}\,(\omega\,\omega_1\,\mathfrak{q}'+\gamma\,\mathfrak{H}^f+\gamma_1\,\mathfrak{H}^r)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

wobei noch $(\omega\gamma_1-\omega_1\gamma)\overline{wg}\mathfrak{q}$ auch gleich ist dem Vektor $\overline{g}(\gamma\mathfrak{d}+\gamma_1\mathfrak{d}_1)-\overline{w}(\omega\mathfrak{d}+\omega_1\mathfrak{d}_1)=\mathfrak{Q}$, so daß

$$(\omega\,\gamma_1-\omega_1\,\gamma)\,w^3\,\mathfrak{q}'=[g\,\overline{w^2}=\varkappa]\,\mathfrak{Q}'.$$

**6. Pole durch Kraft.** An dem mit Masse $M$ belegten System $\Sigma$ mit dem Schwerpunkt $\mathfrak{S}$ greife in $\mathfrak{a}$ die Kraft $\mathfrak{P}$ an; es sei $|\mathfrak{P}|=p$, $\mathfrak{p}$ der mit $\mathfrak{P}$ gleich gerichtete Einheitsvektor, so daß $\mathfrak{P}=p\,\mathfrak{p}$. Das Drehmoment $\mathfrak{M}$ der Kraft $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{M}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{P}=p\,a\,\mathfrak{k}$, wo $a$ der Arm der Kraft ist, $\pm$ je nachdem $\mathfrak{P}$ $\pm$ dreht; es kann angenommen werden, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ senkrecht $\mathfrak{P}$ ist. Es sei $T$ das Trägheitsmoment von $\Sigma$ für $\mathfrak{S}$, $i_{\mathfrak{S}}$ der Trägheitsradius, so daß $T=M\,i_{\mathfrak{S}}{}^2$ und die Winkelbeschleunigung $g$ von $\Sigma$ für die Drehung um $\mathfrak{S}$ ist: $g=\overline{T}\,p\,a$. Es werde $\mathfrak{S}$ als Bezugspunkt gewählt.

Die Beschleunigung $\mathfrak{g}_{\mathfrak{G}}$ des Beschleunigungspols $\mathfrak{G}$ der Bewegung verschwindet. Nun ist diese Beschleunigung die Summe der Beschleunigung $\overline{M}\,\mathfrak{P}$, die $\mathfrak{S}$ infolge $\mathfrak{P}$ hat, und der Beschleunigung infolge der Drehung; daher ist $\mathfrak{g}_{\mathfrak{G}}=\overline{M}\,\mathfrak{P}-w^2\,\mathfrak{G}+g\,\mathfrak{G}'$ also:

$$w^2\,\mathfrak{G}-g\,\mathfrak{G}'=\overline{M}\,\mathfrak{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

$$\mathfrak{G}=(d')=\overline{M}\,(w^2\,\mathfrak{P}+g\,\mathfrak{P}')\,\overline{\vartheta^2=w^4+g^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

[1]) Bei Wiederholung der Konstruktion für viele Punkte mag die Uebertragung der gleichen Verhältnisse $\varkappa$, $w^2+g$ (siehe das folgende) durch irgend ein Hilfsmittel, z. B. Proportionalzirkel, vorgenommen werden.

[2]) Und auch affin zu dem Tripel der Vektoren $\mathfrak{G}\,\mathfrak{D}$, $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{D})'$, $-\mathfrak{g}_{\mathfrak{D}}$, wie sich ergibt, wenn in (24) $\mathfrak{G}$ für $\mathfrak{x}$ gesetzt wird, wo dann $\mathfrak{g}$ verschwindet.

wodurch der Beschleunigungspol $\mathfrak{G}$ aus der Kraft bestimmt erscheint. Aus (28) folgt

$$\mathfrak{G} - \varkappa\,\mathfrak{G}' = M\,w^2\,\mathfrak{P}\,[= p\,\mathfrak{p}] = \mathfrak{J}_0, \quad \mathfrak{G} + \varkappa\,\mathfrak{G}' = [M\,T = i\varepsilon^2]\,p\,a\,\mathfrak{P}' = \mathfrak{H}_0 \quad (30),$$

wobei $\mathfrak{J}_0, \mathfrak{H}_0$ nach (21) Wende- bzw. Tangentialpol sind für den Fall, daß der Drehpol $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{S}$ liegt, also $\mathfrak{D} = 0$ ist[1]), und daß diese Pole bei veränderlichem $\varkappa$ auf der Geraden durch $\mathfrak{G}$ senkrecht $\mathfrak{S}\,\mathfrak{G}$ liegen. Ist dies nicht der Fall, so ist nach (21) für den Wende- bzw. Tangentialpol der Bewegung, da noch nach (30): $\mathfrak{J}_0 = -\varkappa\,\mathfrak{H}_0'$, $\mathfrak{H}_0 = \varkappa\,\mathfrak{J}_0'$:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 + \varkappa\,\mathfrak{D}' = \varkappa\,(\mathfrak{D} - \mathfrak{H}_0)', \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \varkappa\,\mathfrak{D}' = \varkappa\,(\mathfrak{J}_0 - \mathfrak{D})' \quad . \quad . \quad (31).$$

Es ist $\varkappa\,\mathfrak{D}' = T\,w^2\,\mathfrak{M} \times \mathfrak{D}$, daher nach (31) $\mathfrak{J}, \mathfrak{H}$ durch die Kraft

$$\mathfrak{J} = M\,w^2\,(\mathfrak{P} + i\varepsilon^2\,\mathfrak{M} \times \mathfrak{D}), \quad \mathfrak{H} = i\varepsilon^2\,p\,a\,(\mathfrak{P}' - a\,p\,M\,w^2\,\mathfrak{M} \times \mathfrak{D}) \quad . \ (32).$$

Auch für $\mathfrak{M} = 0$, also wenn $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{S}$ angreift, ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$.

**7. Sätze Pöschls.** a) Da $\mathfrak{J}$ nach (32) linear in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ ist, ergibt sich sofort der Satz: Der Wendepol der Resultierenden mehrerer Kräfte ist die Summe der Wendepole der Komponenten.

b) $\mathfrak{J}_0, \mathfrak{H}_0$ sind nach (30) von $a$ bzw. $p$ unabhängig, während $\varkappa = g\,w^2 = T\,p\,a\,w^2$ von beiden abhängig und $\mathfrak{D}$ von $p, a$ unabhängig ist. Bei allein veränderlicher Größe $p$ der Kraft $\mathfrak{P}$ bzw. allein veränderlichem $a$ (d. h. bei einem »Parallelkraftbüschel«) laufen $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{H}$ nach der ersten Darstellung in (31) daher auf Geraden durch $\mathfrak{J}_0$ bzw. $\mathfrak{H}_0$, die parallel $\mathfrak{D}'$, also senkrecht $\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}$ sind und aus den zweiten Darstellungen daselbst, daß sich $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{H}$ auf Geraden durch $\mathfrak{S}$ verändern, die parallel den Vektotoren $(\mathfrak{D} - \mathfrak{H}_0)'$ bzw. $(\mathfrak{J}_0 - \mathfrak{D})'$ sind, also senkrecht zu den Vektoren $\mathfrak{D}\,\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mathfrak{D}\,\mathfrak{J}_0$.

c) Aus (29) folgt durch Bildung von $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{G}$, $[\mathfrak{P} = p\,\mathfrak{p}]\cdot\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{G}'$, wenn noch $M\,p^2\,\vartheta^2 = u$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{G} = u, \quad \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{G} = M\,w^2\,p\,u, \quad \mathfrak{p}'\cdot\mathfrak{G} = M\,T\,a\,u.$$

Durch Elimination von $u$ ergeben sich hieraus, bei $\mathfrak{x}$ statt $\mathfrak{G}$, nach (30) die Kreisgleichungen:

$$\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} - \mathfrak{J}_0\cdot\mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} - \mathfrak{H}_0\cdot\mathfrak{x} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (33).$$

Da diese nicht mehr von $a$ bzw. $p$ abhängen, sind die Kreise die Oerter der Beschleunigungspole $\mathfrak{G}$ für allein veränderliches $p$ bzw. $a$. Diese Kreise Pöschls sind nach (30, 14') auch Wende- bzw. Tangentialkreis, wenn $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{S}$.

d) Ist $\mathfrak{A}$ der Armvektor der Kraft $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P} = p\,a\,\mathfrak{A}'\,|\mathfrak{A}|^2$, nach (30) daher $-i\varepsilon^2\,\mathfrak{A}\,|\mathfrak{A}|^2 = \mathfrak{H}_0$, folglich $\mathfrak{H}_0$ entgegengerichtet $\mathfrak{A}$ und $|\mathfrak{H}_0| = i\varepsilon^2\,|\mathfrak{A}|$; daher: Der Impulspol $\mathfrak{H}_0$ ist Antipol der Kraftgeraden bzw. des Trägheitskreises. Folglich auch: Die Impulspole der Kräfte eines Kraftbüschels liegen auf einer Geraden, der Antipolare seines Scheitels. Oder: Aus (30) folgt: $i\varepsilon^2\,p\,\mathfrak{p}' = p\,a\,\mathfrak{H}_0$, daher:

$$-i\varepsilon^2\,\mathfrak{P} = [p\,a\,\mathfrak{k} \times \mathfrak{H}_0 =]\,\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}_0 = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{P}) \times \mathfrak{H}_0.$$

Für eine Kraft des Kraftbüschels mit dem Scheitel $\mathfrak{a}$ kann gesetzt werden: $\mathfrak{P} = \sigma\,\mathfrak{a} + \tau\,\mathfrak{a}'$, so daß: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{P} = \tau\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}' = \tau\,|\mathfrak{a}|^2\,\mathfrak{k}$, $-i\varepsilon^2\,\mathfrak{P} = \tau\,|\mathfrak{a}|_2\,\mathfrak{H}_0'$:

$$\mathfrak{H}_0 = i\varepsilon^2\,|\mathfrak{a}|^2\,(\sigma\,\tau\,\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}) = -i\varepsilon^2\,|\mathfrak{a}|^2\,\mathfrak{a} + \varrho\,\mathfrak{a}',$$

wo $\varrho$ veränderlich ist. Die Impulspole $\mathfrak{H}_0$ der Kräfte des Büschels liegen daher auf der Antipolare des Punktes $\mathfrak{a}$ bzw. des Trägheitskreises.

Die Impulspole der Kräfte eines durch eine Gerade $g$ senkrecht $\mathfrak{S}\,\mathfrak{a}$ »geradlinig begrenzten Kraftbüschels« mit dem Scheitel $\mathfrak{a}$ liegen demnach auf der Antipolare von $\mathfrak{a}$, die Punkte $\mathfrak{J}_0$ der Kräfte aber nach (30) auf der zu $g$ parallelen, die durch Streckung mit dem Zentrum $\mathfrak{S}$ und dem Verhältnis $M\,w^2$ aus der um $-\mathfrak{a}$ parallel verschobenen Geraden $g$ hervorgeht.



[1]) Die Punkte $\mathfrak{J}_0, \mathfrak{H}_0$ sind der Punkt $A$ bzw. der »Impulspol« $H$ Pöschls.

# KLEINE MITTEILUNGEN

**Ueber die quasi-statische Berechnung geschlossener kreisförmiger Ringe konstanten Querschnittes.** 1. Ist ein geschlossener kreisförmiger Ring konstanten Querschnittes durch Kräfte senkrecht zu seiner Ebene belastet, so treten in einem willkürlichen Querschnitte als statisch unbestimmte Größen eine Querkraft $D$, ein Biegemoment $M$ und ein Torsionsmoment $\mathfrak{W}$ auf.

Gibt man die Lage einer äußeren Kraft $P$ durch den von diesem Querschnitte aus gemessenen Zentriwinkel $\varphi$ an, und reduziert man alle äußeren Kräfte sowie die in dem betrachteten Querschnitte wirkenden statisch unbestimmten Größen durch Multiplikation mit dem zu jeder Größe gehörenden Faktor $\frac{\varphi}{2\pi}$ (wobei also die zu einer Seite des Querschnittes gelegenen Größen $D$, $M$ und $\mathfrak{W}$ verschwinden und die zur anderen Seite gelegenen Reaktionsgrößen unverändert bleiben) so entsteht ein Gleichgewichts-Kraftsystem. $D$, $M$ und $\mathfrak{W}$ sind also aus den Gleichgewichtsbedingungen dieses Kraftsystems in direkter Weise zu bestimmen. Die Resultate sind unabhängig von dem Verhältnis der Steifigkeitsfaktoren $EI$ und $GI_p$ des Querschnittes.

2. Ist der Ring durch Kräfte in seiner Ebene belastet, so gilt folgender Satz:

Multipliziert man die auf den Ring wirkende kontinuierliche Belastung $q_\varphi$ ebenso wie die in den Querschnitten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ wirkenden Größen $M$, $N$ und $D$ mit dem Faktor $\frac{\varphi}{2\pi}$ und ergänzt man das so erhaltene reduzierte Kraftsystem:

a) mit den (durch die Meßrichtung von $\varphi$ bestimmte) im positiven Sinne um $\pi/2$ gedrehten und mit dem Faktor $\frac{\mu}{2\pi}$ multiplizierten tangentiellen Belastungen $t_\varphi$;

b) mit dem Kräftepaar: $-r\oint\frac{n_\varphi\, d s}{2\pi}$ ($r$ = Radius des Ringes; $n_\varphi$ = die nach außen hin positiv gezählte Radialkomponente von $q_\varphi$

so ensteht ein Gleichgewichtskraftsystem.

Die bei der Reduktion ungeändert gebliebenen statisch unbestimmten Größen $M_{2\pi}$ $N_{2\pi}$ $D_{2\pi}$ sind also auch hier aus den Gleichgewichtsbedingungen eines Kraftsystems zu bestimmen.

Vernachlässigt man die Formänderungen, welche im Ring als Folge der Normal- und Querkräfte auftreten, so ist der im obigen Satze unter a) genannte Faktor gleich eins. Sonst hat er den Wert:

$$\frac{1 - \frac{s_b}{r^2 s_n} + \frac{s_b}{r^2 s_s}}{1 + \frac{s_b}{r^2 s_n} + \frac{s_b}{r^2 s_s}}$$

wo $s_b$, $s_n$ und $s_s$ die Steifigkeitsfaktoren des Querschnittes gegen Biegung, Reckung und Schub bedeuten.

Eine konzentrierte Radialkraft $P$ trägt in dem unter b) genannten Integral natürlich den Betrag $-\frac{Pr}{2\pi}$ bei.

3. Wirkt bei dem unter 1. behandelten Belastungsfalle ein äußeres Biegungsmoment $M$ auf den Ring, so hat man dieses Moment durch das reduzierte Moment $\frac{\varphi}{2\pi}M$ und eine Einzelkraft von der Größe $\frac{M}{2\pi r}$ zu ersetzen. In welcher Richtung diese Kraft angebracht werden muß, leuchtet unmittelbar ein, wenn man das Moment durch zwei unendlich nahe, zu den Winkeln $\varphi$ und $\varphi + d\varphi$ gehörende unendlich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte $K$ ersetzt und die unter 1. genannte Reduktion auf diese Kräfte anwendet. Man sieht dann, daß die einzuführende Einzelkraft $\frac{M}{2\pi r}$ in Richtung übereinstimmt mit der zum Winkel $\varphi + d\varphi$ gehörenden Kraft $K$.

Im entgegengesetzten Sinne hat man außerdem im Mittelpunkt des Ringes noch eine Kraft $\frac{s_t}{r^2 s_s + s_t}\frac{M}{2\pi r}$ ($s_t$ = Torsionssteifigkeit des Querschnittes) anzubringen.

Ein Torsionsmoment $\mathfrak{W}$ muß durch das reduzierte Moment $\frac{\varphi}{2\pi}\mathfrak{W}$ und ein Biegungsmoment ersetzt werden, welches aus dem Momente $\mathfrak{W}$ durch Multiplikation mit $\frac{s_b}{\pi(s_b + s_t)}$ und Drehung im negativen Sinne um $\pi/2$ seines Momentvektors entsteht.

4. Wirkt bei dem unter 2. behandelten Belastungsfalle ein Biegungsmoment $M$ auf den Ring, so hat man an Stelle dieses Momentes das reduzierte Moment $\frac{\varphi}{2\pi}M$ und außerdem eine Radialkraft:

$$\frac{1}{1 + \frac{s_b}{r^2 s_n} + \frac{s_b}{r^2 s_s}} \cdot \frac{M}{\pi r}$$

einzuführen. Die Richtung dieser Kraft wird ähnlich wie die der unter 3. genannten Einzelkraft $\frac{M}{2\pi r}$ bestimmt.

Die unter 1, 2, 3 und 4 genannten Sätze werden durch partielle Integration der in den Castigliano'schen Gleichungen vorkommenden Integrale erhalten.

Sie erlauben es den willkürlich (auch exzentrisch) belasteten kreisförmigen geschlossenen Ring in kürzester Zeit durchzurechnen.

Für Beispiele sei auf »de Ingenieur« Dez. 1927 (wo auch die für die Sätze 1. und 2. erforderliche Integration durchgeführt ist) verwiesen.

Delft. C. B. Biezeno. 870

**Ueberschallgeschwindigkeit in zylindrischen Rohren.** In verschiedenen Lehrbüchern findet sich die Bemerkung, daß in zylindrischen Rohren kein Gas beim Ausströmen eine höhere Geschwindigkeit als die Schallgeschwindigkeit erreichen kann. Die Versuche bestätigten dies. Entgegenstehende Beobachtungen ließen sich auf Meßfehler oder falsch angeordnete Meßstellen zurückführen. Aus diesem Umstande wurde auch geschlossen, daß die Ausflußformel nur bis zum Höchstpunkt gilt und dann die Geschwindigkeit einen gleichbleibenden Wert annimmt, statt wieder abzufallen. Es sollen im nachstehenden einige Tatsachen angeführt werden, die zu zeigen scheinen, daß in besonderen Fällen sich doch eine Ueberschallgeschwindigkeit erzielen läßt.

Bei der Herleitung der Ausflußformel wird in der Weise vorgegangen, daß man einen Behälter $B$ wählt, der mit einem gespannten Gase gefüllt ist, das aus der Mündung $M$ auszuströmen versucht und sich auf den Außendruck

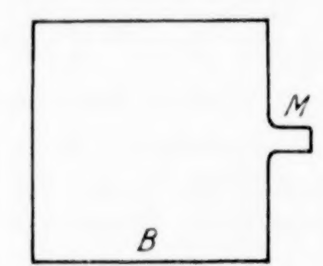



Abb. 1. **Ausströmgefäß.**

der Umgebung ($A$) abspannt. Das Gas ist dabei nacheinander gekennzeichnet durch die Zustandsgrößen:

| | Druck (kg/cm²) | Volumen (m³/kg) | Temperatur (⁰ abs.) |
|---|---|---|---|
| Im Gefäß . . . . | $p_i$ | $v_i$ | $T_i$ |
| In der Mündung . | $p_m$ | $v_m$ | $T_m$ |
| Im Außenraum . . | $p_a$ | $v_a$ | $T_a$ |

Im gespannten Zustande besitzt das Gas eine bestimmte potentielle Energie. Sein Leistungsvermögen sei mit $L$ mkg/kg bezeichnet. Beim Ausströmen setzt sich die potentielle Energie in kinetische um. Diese hat auf 1 kg bezogen den Wert $\frac{w^2}{2g}$, wenn $w$ die Strömungsgeschwindigkeit ist. Wir erhalten durch Gleichsetzung der Ausdrücke die Gleichung:

$$L = \frac{w^2}{2g}, \qquad w = \sqrt{2gL}.$$

Für den beliebigen Punkt $x$, bei dem die Energieumsetzung noch nicht vollendet ist, vielmehr ein potentieller Rest $L_x$ vorhanden ist, gilt:

$$w_x = \sqrt{2g(L - L_x)}.$$

Für die Mündung gilt daher:

$$w_m = \sqrt{2g(L - L_m)}.$$

Erfolgt die Ausströmung ohne Wärmeaufnahme oder Abgabe, d. h. adiabatisch, so ist $L$ gegeben durch:

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_i v_i,$$

worin $\varkappa$ der Exponent der Adiabate ist. Setzt man den Wert in die Gleichung für $w$ ein, so wird:

$$w_m = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(p_i v_i - p_m v_m)}$$

und wegen

$$p_i v_i^\varkappa = p_m v_m^\varkappa$$

$$w_m = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_i v_i \left\{1 - \left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right\}}.$$

Das sekundlich ausströmende Gewicht wird bei $f$ cm² Mündungsquerschnitt und unter Berücksichtigung von

$$v_m = v_i \left(\frac{p_i}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

bestimmt zu:

$$G_s = f \cdot \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_i}{v_i} \left\{\left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa}}\right\}}.$$

Die Kurve der ausströmenden Gasmassen[1]) ist in Abb. 2 wiedergegeben für verschiedene Werte von $\frac{p_a}{p_i}$. Wir sehen, daß sie einen parabolischen Charakter hat. Das Maximum der

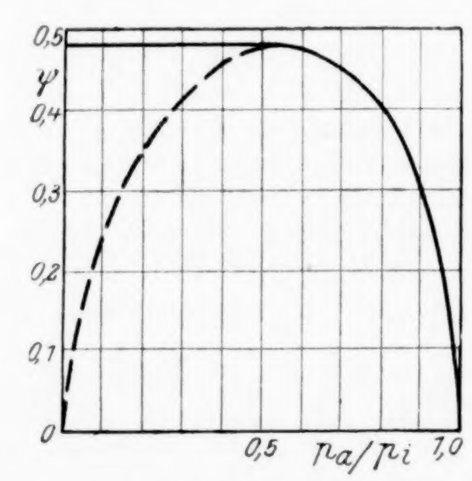



Abb. 2. **Ausströmkurve.**

Kurve läßt sich durch Differenzieren und Nullsetzen des Klammerausdruckes finden. Es tritt ein für:

$$\frac{p_a}{p_i} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

Aus dem Umstande, daß die Ausflußmenge nach der theoretischen Formel kleiner werden muß, sobald man das kritische Ausdehnungsverhältnis überschreitet und aus dem Umstande, daß sich dieser Zustand in der Praxis bisher nicht verwirklichen ließ, schließt man, daß die Formel nach Erreichen des Höchstwertes für die Ausflußmenge ihre Gültigkeit verliert. Die Versuche, die unter den Bedingungen des Turbinenbaues bisher angestellt wurden, d. h. bei denen es sich darum handelte, eine unbegrenzt große Gasmasse durch die Mündung ausströmen zu lassen, zeigten, daß nach Ueberschreiten des kritischen Wertes

[1]) Schüle, Thermodynamik Bd. 1 S. 321 (4. Aufl.).

die Ausströmung sich an das Maximum anlehnt und konstant bleibt.

Wie es scheint, bieten die Vorgänge im Geschützrohr Gelegenheit, die bisherigen Ansichten zu revidieren. Unter Berücksichtigung des noch bei Einsetzen der Verbrennung festen Zustandes des Pulvers und der darin enthaltenen Energie, sowie seiner Verbrennungswärme und eines Verbrennungsprozesses, der nur wenig vom Gleichraumverfahren abweicht, sich aber dem Sabatheverfahren anschließt, erhält man eine Verbrennungshöchsttemperatur von 4475° abs.

Schreiben wir für die kritische Mündungsgeschwindigkeit oder was dasselbe ist für die Schallgeschwindigkeit nach Schüle:

$$w_{Sch} = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa+1}p_i v_i}$$

oder wegen

$$p_i v_i = R \cdot T_i ,$$

worin $R = 24{,}9$ die Gaskonstante des betrachteten Gases ist,

$$w_{Sch} = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa+1}R\,T_i}.$$

Der Wert von $\varkappa$ ist hier im Mittel bei der Expansion zu 1,22 zu wählen. Die Höchstgeschwindigkeit, die die Gasmassen im Rohr erreichen können, ist nach dem Vorhergehenden die Schallgeschwindigkeit und hat den Wert

$$w_{Sch} = 1100\ \mathrm{m/s}.$$

Wenn die Gase selber keine höhere Geschwindigkeit erreichen können, so muß es ihnen erst recht unmöglich sein, noch ein Geschoß über diese Geschwindigkeit hinaus zu beschleunigen. Es ist aber bekannt, daß das Geschoß des Parisgeschützes, das mit dem erwähnten Pulver verfeuert wurde, eine Mündungsgeschwindigkeit von 1400 m/s hatte[1]).

Der Widerspruch löst sich, wenn wir das Problem von einer anderen Seite betrachten. Denken wir uns ein sehr langes Gefäß, das an

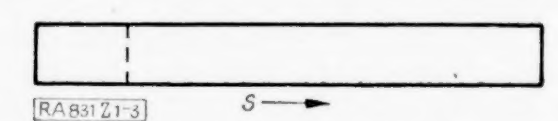



**Abb. 3. Versuchsgefäß.**

beiden Seiten geschlossen ist (Abb. 3) und verbrennen in ihm am linken Ende das Pulver, wobei sich das Gas zunächst nicht ausdehnen soll, so nimmt es einen Zustand an, der durch die Größen $p_i, v_i, T_i$ gekennzeichnet ist. Die Masse des Pulvers sei $m$. Das Gas hat nun das Bestreben sich auszudehnen. Die Front des Gases, die wesentlich gerade bleiben soll und parallel zu späteren Schichten, wandert längs des Weges $s$. Die jeweilige Geschwindigkeit ist dabei $\frac{ds}{dt}$. Sobald das Gas auf die Gegenwand aufprallt, wird es sich wiederum verdichten. Bei Abwesenheit von Widerständen, die energieverzehrend sind, wird die Bewegung ständig

[1]) Revue d'Artillerie, 1926. Les gros canons allemands.

weiter gehen. Wir haben es somit mit einer Schwingung großer Amplitude zu tun, deren Rückstellkraft nicht dem Geradliniengesetz folgt, da die Adiabate erheblich davon abweicht. Wir wollen von einer Dämpfung absehen, da einerseits die für ihre Berücksichtigung erforderlichen Grundlagen heute noch nicht vorhanden sind, andererseits, sie nur den Zahlenwert, nicht aber das Wesen des Vorganges beeinflußt.

Die Schwingungsgleichung lautet:

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} + F \cdot p(v) = 0 .$$

Hierin stellt der Faktor $\frac{d^2 s}{d t^2}$ die Beschleunigung dar, $F$ den Rohrquerschnitt und $p(v)$ die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen.

In der Gleichung muß zunächst $s$ durch $v$ ersetzt werden. Die erforderliche Beziehung finden wir, wenn wir bedenken, daß bei einem Vorrücken der Gasfront um den Betrag $ds$ ein Volumenzuwachs um $dv$ erfolgt gemäß der Gleichung $dV = F \cdot ds$. Da es sich um $G$ kg Gas handelt, so gilt für das spezifische Volumen die Beziehung $dV = G \cdot dv$. Damit erhalten wir $G \cdot dv = F \cdot ds$ und durch Differentiation

$$G \cdot \frac{d^2 v}{d t^2} = F \cdot \frac{d^2 s}{d t^2}.$$

Die Schwingungsgleichung hat nun die Form:

$$m \cdot \frac{G}{F^2} \cdot \frac{d^2 v}{d t^2} + p(v) = 0 .$$

Ihre Lösung ist[1]):

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{-\frac{2}{\tau^2}\int p\, dv} .$$

Hierin ist $\tau$ eine Hilfsgröße. Sie hat den Wert:

$$\tau = \sqrt{\frac{m \cdot G}{F^2}} .$$

Setzt man wieder $ds$ ein, so wird:

$$w = \frac{ds}{dt} = \sqrt{-\frac{2F^2}{mG} \cdot \int p\, dv \cdot \frac{G^2}{F^2}} = \sqrt{2gL} .$$

Denn das Integral $\int p\,dv$ hat (nach bekannten Sätzen der Thermodynamik) den Wert $L$. Das Minuszeichen steht hier, weil die Bewegung unter Abnahme der potentiellen Energie erfolgt.

Was wir gefunden haben, ist die uns bekannte Ausflußformel für Düsen. Sie enthält, da sie für einen beliebigen Ausdehnungsvorgang, der den Charakter einer Schwingung hat, abgeleitet wurde, keinerlei Beschränkung für den Gültigkeitsbereich und kann daher auch nicht bei der Schallgeschwindigkeit ihren Wert einbüßen.

Aus dieser Ableitung scheint zu folgen, daß man die Expansion einer begrenzten Gasmasse stets so leiten kann, daß Ueberschallgeschwindigkeit in einem zylindrischen Rohre

[1]) R. Rüdenberg, Diese Zeitschrift Bd. 3 (1923), S. 454.

eintritt. Voraussetzung ist die endliche Begrenztheit der Gasmasse und eine genügende Länge des Rohres. Eine andere Grenze ist in der Dämpfung zu erkennen, die der Bewegung entgegenwirkt und die nur dann ohne merklichen Einfluß bleibt, wenn die schwingende Energie diesen Verlusten gegenüber groß ist. Auch der scheinbare Widerspruch, der in dem Kleinerwerden des Ausflußgewichtes bei Zunahme des Ausdehnungsverhältnisses liegt, löst sich nun, da nach Ueberschreiten der Schallgeschwindigkeit die Gase soweit verdünnt sind, daß ihre höhere Geschwindigkeit nicht mehr im Stande ist, die Gewichtsabnahme durch Ausdehnung auszugleichen.

Berlin. E. A. Wedemeyer. 831

# BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

**Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik.** Herausgegeben von Prof. Dr. F. Auerbach und Prof. Dr. W. Hort. Band I, Lief. 1. Mit 120 Abb. im Text. IX + 306 S. Preis 30 M. Band III. Mit 198 Abb. im Text. IX + 468 S. Preis 40 M. Band V, Lief. 1. Mit 231 Abb. im Text. IX + 274 S. Preis 36 M. Band V, Lief. 2. Mit 101 Abb. im Text u. 1 Taf. VI + 718 S. Preis 19,20 M. Band VI, Lief. 1. Mit 311 Abb. im Text. VIII + 460 S. Preis 45 M. Band VII, Lief. 1. Mit 125 Abb. im Text. IV + 238 S. Preis 22 M. Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1927/28.

Aus dem altbekannten Winkelmannschen Handbuch der Physik, das 1896 in erster, 1909 in zweiter Auflage erschien, hat sich jetzt, da eine dritte Auflage notwendig wurde, das Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik als selbständiges Werk losgelöst. Sein Ausmaß ist auf sieben Bände berechnet, die gewaltigen Umfang annehmen werden. Man kann wohl sagen, daß es die bisher umfassendste Darstellung des Gesamtgebiets der Mechanik ist, die hier versucht wird. Der erste Band soll nach den bisher vorliegenden Lieferungen die Grundlagen einschließlich der geometrischen Teile der Mechanik enthalten, der zweite die Dynamik starrer Körper; der dritte und vierte Band sind der Elastizität und Festigkeit, der fünfte und sechste den Flüssigkeiten und Gasen gewidmet; im siebenten sollen besondere Probleme wie Kapillarität, Diffusion, Thermomechanik usf. behandelt werden. Gegenüber dem Springerschen Handbuch der Physik, in dem der Mechanik drei Bände vorbehalten sind, fallen drei kennzeichnende Unterschiede auf. Vor allem ist die Darstellung breiter, behaglicher, mehr auf Verständlichkeit und Benutzbarkeit als auf knappe Konzentration bedacht. Daß die technischen Anwendungen in weit stärkerem Maße berücksichtigt werden, liegt schon im Gesamtplan des Werkes und ist ja auch im Titel deutlich zum Ausdruck gebracht. Schließlich ist hervorzuheben, daß das Buch in erfreulicher Weise, nach Art der älteren Lehrbücher der Mechanik, auch fernerliegende, von der mathematischen Theorie noch nicht erfaßte mechanische Erscheinungen mit in den Kreis der Betrachtungen zieht. Um nur ein Beispiel zu nennen, findet man in dem Kapitel über Erdbeben eine Abbildung, die die typischen Formen der Zerstörung von Häusern durch Erdbebenstöße darstellt. Der Fortschritt der wissenschaftlichen Mechanik kann gewiß nur gefördert werden, wenn derart der Anschauungskreis möglichst erweitert wird.

Ueber die einzelnen bisher erschienenen Lieferungen läßt sich schwer etwas Abschließendes sagen, da sie Teile der verschiedenen Bände sind und ein Ueberblick über das in den ausstehenden Lieferungen noch zu Erwartende nicht gegeben wird. Jedenfalls bietet die Durchsicht der vorliegenden Hefte den Eindruck großer Umsicht und einer gewissen Gediegenheit in dem dargebotenen Stoff. Erstaunlich ist die umfangreiche Leistung des einen Herausgebers, F. Auerbach. Von ihm rührt nicht nur eine große Reihe vortrefflicher Aufsätze über die Grundbegriffe, verschiedene Abschnitte der Elastizitätslehre, der Hydrodynamik usf. her, sondern er hat überdies in Zusätzen zu solchen Artikeln, die ihm ein zu theoretisches Aussehen zu haben schienen, noch vieles beigetragen. In allen Auerbachschen Kapiteln ist größter Wert auf Zusammenstellung des Tatsachenmaterials, besonders auf ausführliche tabellarische Angaben gelegt. Man wird kaum in einem anderen Werke so vollständig alle experimentelle Daten über die mechanischen Eigenschaften der Stoffe finden wie hier. Größere oder mehr in die Tiefe gehende mathematische Ueberlegungen liegen dem Herausgeber allerdings nicht. Es werden zumeist nur die Ansätze oder ganz kurz die Resultate erwähnt, so daß der Lernende auf diesem Gebiete nicht ganz auf seine Rechnung kommt. Von gewohnter Präzision und formaler Abgeschlossenheit sind die Aufsätze von A. Korn über Potential und über die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Vorteilhaft hebt sich der Artikel von Geckeler über die Biegungsprobleme an Stäben, Platten und Schalen ab. Von der Hydromechanik bringen die bisherigen Lieferungen im wesentlichen nur eine Behandlung der älteren Problemgruppen, meist auch ohne vollständige Berücksichtigung der neueren Literatur. Man wird wohl erwarten dürfen, daß die moderne Entwicklung in besonderen Aufsätzen in den späteren Lieferungen zur Darstellung kommen wird.

Doch schon jetzt kann hier ausgesprochen werden, daß den beiden Herausgebern und ihrem großen Stab von Mitarbeitern der Dank aller Fachleute gebührt für die mühevolle Arbeit, mit der sie für lange Zeit ein Standardwerk der Mechanik schaffen, das eine be-

stimmte und bedeutungsvolle Stellung innerhalb der gesamten wissenschaftlichen Literatur einnehmen wird. Mises. 895

Dr.-Ing. FRANZ **OLLENDORF.** Erdströme. Grundlagen der Erdschluß- und Erdungsfragen. Mit 64 Textabb. Julius Springer, Berlin 1928. VIII + 260 S. Preis geb. 20 M.

Der Verfasser hat bereits durch sein früheres Buch über Hochfrequenztechnik und zahlreiche Abhandlungen in technischen Zeitschriften nicht nur eine hervorragende Kenntnis moderner elektrotechnischer Probleme, sondern auch eine sichere Handhabung der mathematischen Hilfsmittel dieses Gebiets, die sich durchaus nicht auf die elementaren Methoden beschränken, erwiesen. Für das in dem neuen Buch bearbeitete Gebiet konnte daher kaum ein geeigneterer Autor gefunden werden.

Die Frage der Erdströme hat insbesondere seit der Ausbreitung der Hochspannungsübertragungen und der elektrischen Bahnanlagen wachsende Bedeutung bekommen; von besonderer Wichtigkeit ist dabei, neben anderen, die Frage nach den Spannungsdifferenzen, die auf kurze Entfernungen, z. B. Schrittweite eines Mannes, an der Erdoberfläche auftreten, und die für Menschen gefährlich werden können; ferner technische Fragen, wie Beeinflussung von Nachbarleitungen, der Einfluß auf die Antennenwirkung und ähnliches.

Die angewandten mathematischen Methoden sind durchaus der klassischen Potentialtheorie entnommen, und daher für deren Kenner leicht verständlich. Das Eigenartige des Buches liegt in der Fülle verschiedenartiger elektrotechnischer Probleme, die durch oft weitgehende, aber immer begründete und kritisch geprüfte Vereinfachung auf Aufgaben dieser Disziplin zurückgeführt werden. Verschiedene dieser Aufgaben sind von dem Verfasser erstmalig in Angriff genommen worden, so die über Ausgleichsvorgänge, bei denen die Erdstromverteilung eine Rolle spielt, die über Wärmeerzeugung durch Erdströme, und andere.

Jedenfalls kann das Buch wärmstens empfohlen werden; nicht nur für die, die sich speziell mit den Erdströmungsproblemen beschäftigen, sondern für alle, die tiefer in den Sinn der potentialtheoretischen Methoden in ihrer Beziehung zur Theorie der elektromagnetischen Felder eindringen wollen.

Breslau. F. Noether. 887

H. **KOBOLD** Stellarastronomie. Sonderausgabe aus der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Mit einem Vorwort des Verfassers. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1926. S. 239—372. Preis geh. 5,80 M.

Die vorliegende Schrift ist ein Separatabdruck aus Band VI der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Nach einer Uebersicht über das Beobachtungsmaterial sind behandelt: Die scheinbare Verteilung der Sterne, die Milchstraße, die räumliche Verteilung der Sterne und die Exstinktion, die Eigenbewegung der Sterne und der Sonne, Besonderheiten des Bewegungszustandes, bewegte Sterngruppen, der Bau des Sternensystems. Für die Leser dieser Zeitschrift ist vielleicht interessant, daß vielfach von den Methoden der mathematischen Statistik, insbesondere der Kollektivmaßlehre, Gebrauch gemacht wird.

Prag. Philipp Frank. 888

Dr. J. **FRENKEL,** Professor für theoretische Physik am Polytechnischen Institut in Leningrad. Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Band. Allgemeine Mechanik der Elastizität. Mit 39 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. X + 365 S. Preis 28,50 M, geb. 29,70 M.

Das letzte ausführliche Lehrbuch der Elektrodynamik in deutscher Sprache war das von M. Abraham. Es stammt aus der Zeit, als es den Anschein hatte, eine »elektromagnetische Weltanschauung« werde die mechanistische verdrängen, als besäße man in den Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen bereits den letzten Schlüssel zum Verständnis der Materie. Wir wissen heute, daß die auf ihnen beruhende »klassische Elektrodynamik« im Prinzip keine andere Bedeutung für das physikalische Weltbild hat als die klassische analytische Mechanik, nämlich die eines mathematischen Gerüstes, durch das sich die Erscheinungen im Groben gut, im Feinen aber nicht mehr darstellen lassen, daß aber in ihr ein Formelsystem, das allgemeine Gültigkeit hat, nicht gefunden ist. Jede Darstellung der klassischen Elektrodynamik muß heute von dieser Erkenntnis ausgehen, und das führt notwendig dazu, sich die Darstellungen der analytischen Mechanik als Vorbild zu nehmen, die schon lange rein deduktiv vorgingen, und es den speziellen Anwendungen (Hydrodynamik usw.) überließen, die Beziehungen zum Experiment herzustellen. Ganz in diesem Sinne ist nun das vorliegende Lehrbuch gehalten. Es beginnt nicht wie üblich mit Fuchsschwanz und Papierschnitzeln, sondern sucht das Begriffssystem der Elektrodynamik rein logisch auf dem kürzesten und durchsichtigsten Weg zu entwickeln, ohne sich an die geschichtlich begründete Darstellungsweise zu halten, die häufig noch vorherrscht. In diesem Sinn fühlt man in dem Buch etwas vom Geiste der Heimat des Verfassers, von Sowjetrußland. Sowie die analytische Mechanik vom Massenpunkt ausgeht, so ist der vorliegende erste Band ganz auf der Vorstellung der Punktladung begründet, während der zweite, analog der Anwendung auf Hydrodynamik und Elastizitätslehre, die bereits der experimentellen Erfassung nahestehenden Lehre von den makroskopischen elektromagnetischen Vorgängen in wirklichen Körpern behandeln soll.

Der vorliegende Band ist sehr übersichtlich in drei Abschnitte geteilt, denen eine Einleitung über Vektor- und Tensorrechnung vorangeht. Der erste Abschnitt behandelt die von der Zeit unabhängigen Vorgänge. Den Ausgangspunkt bildet dabei nicht die Vorstellung

der isolierten Punktladung, sondern die des elektrischen Dipols. Die Herleitung der Gesetze geschieht nicht wie üblich aus den empirisch gegebenen Gesetzen von Coulomb und Biot-Savart, sondern aus dem Energiesatz und der Aequivalenz von elektrischen Strömen mit magnetischen Dipolen. Besonders hervorzuheben ist, daß der Ersetzung willkürlicher Felder durch Systeme von Multipolen ein breiter Raum gewidmet ist. Der zweite Abschnitt behandelt die von der Zeit abhängigen elektromagnetischen Wirkungen, also die Strahlungserscheinungen. Die Struktur des Strahlungsfeldes bewegter Ladungen wird sehr ausführlich analysiert und überall darauf hingewiesen, daß die übliche Strömungsvorstellung der Energie mit Lichtgeschwindigkeit nur in der »Wellenzone«, keineswegs aber in der unmittelbaren Umgebung des schwingenden Teilchens anwendbar ist. Der dritte Abschnitt behandelt die Auffassung der von der Zeit abhängigen Erscheinung als formal gleichwertig den zeitunabhängigen, wenn man zum vierdimensionalen Raum-Zeitwelt übergeht, also die spezielle Relativitätstheorie. Hier sei besonders hervorgehoben, daß der Verf. nicht, wie es so häufig geschieht, in den ersten Kapiteln eine Aetherphysik darstellt, um zum Schluß zu zeigen, daß es keinen Aether gibt, sondern daß er konsequent von Anfang an überhaupt keinerlei Gebrauch von der Aethervorstellung und selbst nicht der Aetherredeweise macht. Hier zeigt sich am besten der Vorteil der ganz unhistorischen Darstellungsweise. Allerdings wäre in der Behandlung der Relativitätstheorie, über die noch immer so viele Mißverständnisse, selbst unter den Physikern, herrschen, ein Abweichen von der rein deduktiven Darstellung, gerade weil sie hier besonders verlockend ist, aus Gründen der »physikalischen Volksaufklärung« vielleicht wünschenswert.

Es ist kein Zweifel, daß wir in der vorliegenden Darstellung der klassischen Elektrodynamik eine hervorragende Leistung vor uns haben, die es sowohl durch die logische Klarheit der Entwicklungen als auch durch die Reichhaltigkeit des behandelten Stoffes verdient, von allen gelesen zu werden, die mit der Elektrizitätslehre zu tun haben. Für die Physiker im engeren Sinne ist das Buch insbesondere aus dem Grunde zu empfehlen, weil es mit der größten intellektuellen Gewissenhaftigkeit geschrieben ist und nirgends, wie es in der Lehrbuchliteratur oft vorkommt, Schwierigkeiten begrifflicher Art verwischt sind. Demjenigen, der das Buch durchgearbeitet hat, wird auch nicht zustoßen, daß er das $\nu_{\text{quant.}}$ schon leichter berechnen kann als das $\nu_{\text{klass.}}$, wie es heute manchmal vorkommen kann.

Prag. Philipp Frank. 888

FRIEDRICH REINHARD **LIPSIUS** Wahrheit und Irrtum in der Relativitätstheorie. Verlag von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck) Tübingen 1927. VII + 154 S. Preis 7,50 M.

Die Schrift behandelt in vier Kapiteln: die spezielle Relativitätstheorie, Aether und Materie, die Relativierung der Kausalität, die allgemeine Relativitätstheorie. Der Verfasser gehört zu denjenigen Fachphilosophen, die sich viele Kenntnisse in der Physik angeeignet haben und auf Grund derselben die physikalischen Theorien vom philosophischen Standpunkt kritisieren. Nun braucht man dazu nicht so sehr viele Kenntnisse als ein gründliches Durchdenken des Gedankensystems der modernen Physik. Es scheint aber, daß gerade bei den Philosophen die Ansicht oft vorkommt, daß »physikalisch gebildet sein« heiße, viele Tatsachen zu kennen. Auf Grund dieser oberflächlichen, nicht eindringenden, Kenntnis übt der Verf. eine Kritik an der Relativitätstheorie, die aber in Wirklichkeit höchstens eine Kritik einiger falscher Ausdrücke in populären Darstellungen ist, während der eigentliche Gedankengang der Theorie selbst dem Verf. kaum zum Bewußtsein gekommen ist. Als Beispiel für die Oberflächlichkeit, mit der alles angefaßt wird, will ich nur einen Absatz anführen: »Hier haben wir wieder das berühmte Hexeneinmaleins der Relativisten: Lichtgeschwindigkeit weniger Systemgeschwindigkeit ist gleich Lichtgeschwindigkeit! Nach derselben Logik müßte offenbar auch die Schallgeschwindigkeit überall die gleiche sein, oder man könnte behaupten, die Geschwindigkeit des Kranichfluges sei immer die nämliche, ob sie vom Theater zu Korinth oder vom gleichmäßig dahinschreitenden Ibykus aus beobachtet wird. Besitzen doch die Vögel eine nach Arten verschiedene durchschnittliche Fluggeschwindigkeit, deren Größe naturgesetzlich bestimmt ist.« Der Verf. scheint sich nie Gedanken darüber gemacht zu haben, wodurch sich die Lichtfortpflanzung vom Kranichflug grundsätzlich unterscheidet, nämlich durch die einfache Tatsache, daß ein Kranich in verschiedenen Bezugssystemen verschiedene Anfangszustände besitzt, die also sein Verhalten verschieden determinieren, während beim Licht wegen der empirisch feststellbaren Unabhängigkeit seiner Geschwindigkeit von der der Lichtquelle eine solche Verschiedenheit der Anfangsbedingungen nicht vorhanden ist. Das Kapitel schließt mit dem ebenso alten wie unzutreffenden Witz: »Dabei enthielt der Satz, daß der Mensch durch Reisen jung bleibt, vielleicht die einzig bleibende Wahrheit der speziellen Relativitätstheorie.« Nachdem der Verf. im ersten Kapitel die Anmaßung der Physiker, über Raum und Zeit etwas auszusagen, entschieden in ihre Schranken verwiesen hat, geht er in den späteren zur Offensive über und entwickelt eine Aether- und Gravitationstheorie, die alle Schwierigkeiten mit einem Schlage lösen soll, die aber zu unbestimmt gehalten ist, als daß man über sie ein Urteil abgeben könnte.

Wenn etwas an der Schrift interessant ist, so ist es nur die Frage, die man an sie anknüpfen kann: was hat unser Hochschulunterricht in der Philosophie für einen Sinn, wenn er nicht zur Vertiefung, sondern zur Nachlässigkeit im Denken führt?

Prag. Philipp Frank. 888

PIERRE **BOUTROUX,** Membre de l'Institut. Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von H. Pollaczek-Geiringer in Berlin. Wissenschaft und Hypothese 28. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. 253 S.

Das anregend geschriebene Buch des jüngeren Boutroux sucht die Grundgedanken herauszuarbeiten, die in der Entwicklung der Mathematik vom Altertum her bis in die neueste Zeit zur Auswirkung gekommen sind. Der Verfasser schreibt den raschen Verfall der griechischen Mathematik, die so vielversprechend begonnen hat, mit Recht dem Umstand zu, daß die Griechen grundsätzlich jeden Zusammenhang mit den Anwendungen verpönten. Daß er aber der Bedeutung, die heute die Anwendungen der Mathematik für ihre weitere Gestaltung besitzen, völlig gerecht würde, kann nicht behauptet werden. Auch ließe sich gegen manches, was über das Verhältnis von Mathematik und Physik gesagt wird, verschiedenes Wesentliche einwenden. Da es aber andrerseits gewiß nicht viele Bücher gibt, die von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus einen Einblick in die mathematische Gedankenwelt gewähren, und der Verfasser wohl ein zuständiger Führer auf diesem Gebiete ist, wird niemand ohne Gewinn das Buch zur Hand nehmen. Die Uebersetzung ist mit großer Sorgfalt ausgeführt und liest sich flüssig; fur eine Reihe wertvoller Anmerkungen wird man der Uebersetzerin Dank wissen. Mises. 900

Dr.-Ing. A. **NÁDAI,** a. o. Prof. an der Universität Göttingen. Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Mit 298 Abb. 171 S. Julius Springer, Berlin 1927. Preis 15 M, geb. 16,50 M.

Die zahlreichen Arbeiten, die in den letzten Jahren über plastische Formänderung von festen Körpern erschienen sind, haben Herrn Nádai, der an jenen Arbeiten großen Anteil hat, veranlaßt, die wichtigsten Ergebnisse in einem kleinen Buche zusammenzufassen. Nach einigen einleitenden Erklärungen gibt er eine Einführung in die Lehre von den Spannungen und Formänderungen, hauptsächlich unter Benutzung der Mohrschen Darstellungsweise. Eingehendere Erörterung findet, wie billig, die Frage nach der Gestalt der Fließgrenze. Hier wird, wie öfter in der Literatur, die von M. T. Huber angegebene Fließgrenze mit der vom Referenten herrührenden verwechselt. (Bei Huber gilt für positive mittlere Zugspannung nicht die Gestaltänderungsarbeit, sondern die gesamte Formänderungsarbeit als Grenzmaß.) Den wertvollsten Teil des Buches bildet jedenfalls die Wiedergabe der Versuchsergebnisse, die durch eine große Zahl ausgezeichneter Abbildungen von Fließfiguren ergänzt wird. In den theoretischen Ausführungen, namentlich zum ebenen Problem, hat sich der Verfasser hauptsächlich auf Wiedergabe seiner eigenen Arbeiten beschränkt. Im Interesse des Lesers wäre es vielleicht gelegen gewesen, auch noch etwas allgemeinere Gesichtspunkte zur Geltung zu bringen. Die im Anhang zusammengestellten Angaben über den »Spannungstensor« könnten zweckmäßigerweise auch noch manche Ergänzung erfahren. Hoffentlich wird das lebhafte Interesse, das zurzeit für die in dem Buch behandelten Fragen besteht, bald zum Erscheinen einer vervollständigten Neuauflage Veranlassung geben.

Mises. 900

ARTHUR GORDON **WEBSTER,** A.B. (Harv.), Ph. D. (Berol.) Professor of Physics, Direktor of the physical Laboratory, Clark University, Worcester, Massachusetts. Edited by SAMUEL J. **PLIMPTON** Ph. D. (Yale), Assistent Professor of Physics, Worcester Polytechnic Institute, Worcester, Massachusetts. Partial Differential Equations of mathematical Physics. B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band XLII. G. E. Stechert & Co., New York. B. G. Teubner, Leipzig 1927. VII + 440 S. Preis geh. 23 M, geb. 25 M.

Das hinterlassene Werk von Webster, das hier in der Originalsprache erscheint, sucht die mathematischen Hilfsmittel, die in der klassischen Physik gebraucht werden, ohne jedes Eingehen auf rein mathematische Einzelheiten darzustellen. Der Inhalt des Buches kann am besten dahin charakterisiert werden, daß es von allen Teilen des neuen Riemann-Weber Bd. 1 ungefähr die Hälfte bringt. Nur die Methoden der Variationsrechnung sind vollständig fortgelassen. In der Form der Darstellung, die klar und gut lesbar ist, zeigt sich die gute alte Tradition der englischen mathematischen Physik. Mises. 900

**Luftfahrtforschung.** Berichte der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof (DVL), der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen (AVA), des Aerodynamischen Instituts der Techn. Hochschule Aachen (AIA) und anderer Stätten der Luftfahrtforschung. Gesammelt als Beihefte zur Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt (ZFM) von der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL). 1. Band, Heft 1—4. 2. Band, H. 1. R. Oldenbourg, München 1928.

Es ist durchaus begrüßenswert, daß die drei Forschungsanstalten in Adlershof, Göttingen und Aachen sich zu einer gemeinschaftlichen Publikation ihrer laufenden Berichte entschlossen haben. Die hier, Band 7, 1927, S. 506 angezeigten Aachener Berichte hören damit zu erscheinen auf.

Von wertvollen Arbeiten der ersten Hefte nenne ich vor allem den Bericht der DVL von H. Blenk und F. Liebers über Flügelschwingungen freitragender Eindecker, sowie den gemeinsamen Bericht der DVL und der Hamburger Schiffbau-Versuchsanstalt von Hermann, Kempf und Klose über Schleppversuche an

Zweischwimmerapparaten; beide Arbeiten in Heft 1. Heft 2 enthält einen ausführlichen Bericht der DVL über Lautal als Baustoff für Flugzeuge. Heft 4 ist als Sonderheft für Funkwesen und Elektrotechnik erschienen.

Mises. 900

L. **HEFFTER,** Professor an der Universität Freiburg i. Br., und C. **KOEHLER,** Professor an der Universität Heidelberg. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Grundlagen, Projektive, Euklidische, Nichteuklidische Geometrie. Bd. I. Grundlagen. Grundgebilde I. Stufe. Euklidische Ebene. Zweite wesentlich umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 112 Figuren im Text. G. Braun, Karlsruhe 1927. XVI + 477 S. Preis brosch. 20 M.

Es macht viel Freude, in dem umfangreichen ersten Bande dieses Lehrbuches, dessen Neuauflage nun vorliegt, zu blättern und seine Leistungsfähigkeit zu prüfen. Man befürchtet zunächst — bei den 470 Seiten, die den Gebilden erster und zweiter Stufe gewidmet sind — Weitschweifigkeit; doch überzeugt man sich sofort bei den Stichproben, daß alles in klarer, übersichtlicher Form angeordnet ist, daß große Mühe auf scharfe Begriffsbildung und vor allem auf wohldurchdachte Bezeichnungen verwandt wurde. Das imaginäre Element und seine Bedeutung auch für reelle Untersuchungen wird nirgends stiefmütterlich, sondern sehr präzise behandelt. Stets sind nicht Gleichungen, sondern die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen das Schlußergebnis. Der Weg durch die axiomatischen Grundlagen, auf deren Voranstellung die Verfasser großen Wert legen, durch die projektive Geometrie, die Parallelgeometrie und schließlich die Orthogonalgeometrie ist ein weiter Weg; doch ist er so geebnet und an jeder Stelle so aussichtsreich, daß mancher — besonders der Student — ihn einem kürzeren Wege vorziehen wird. Freilich vermisse ich einige Dinge in dem Buche, die zur analytischen Geometrie der Ebene gezählt werden sollten, weil sie dem Anfänger an anderer Stelle überhaupt nicht geboten werden, so etwa die quadratischen Verwandtschaften.

Berlin. F. Rehbock. 878

**Sphinx-Patent-Konstruktionskasten.** B. G. Teubner, Leipzig.

Der Konstruktionskasten dient in erster Linie zur Herstellung solcher Raummodelle, die aus geraden Linien aufgebaut sind, also von Polyedern und Kristallen, Regelflächen, räumlichen Fachwerken, Liniensystemen der geometrischen Optik, Vektoranordnungen. Er enthält runde Holzstäbe von 50 cm Länge und etwa 3 mm Dicke in fünf Farben. Die Zusammensetzung dieser durch Brechen leicht zu verkürzenden Stäbe zu räumlichen Ecken geschieht in der Weise, daß man durch die Spitze einer 1,5 cm langen kegelförmigen dünnen Blechhülse einen Bindedraht steckt, diese Hülse fest auf das Stabende drückt und nun die so präparierten Stäbe in gewünschter Zahl mit den herausragenden Drähten zusammenbindet. Bei nicht-stabilen Stabsystemen lassen sich die Ecken mit einem Schnell-Lot versteifen. Kurven, etwa Kegelschnitte, bindet man aus Peddigrohr hinein. Da das Verfahren sehr schnell und sauber zum Ziel führt, wird es beim Schulunterricht und bei Hochschulvorlesungen und Uebungen mit Erfolg zu verwenden sein.

Berlin. F. Rehbock. 878

**Rendiconti del Seminaro Matematico e fisico di Milano.** Vol I. Libreria Editrice Politecnica Milano 1927. VIII + 128 S.

Das genannte Seminar ist eine die höheren mathematischen und physikalischen Bestrebungen Mailands zusammenfassende Organisation, die in jährlichem Wechsel ihren Sitz an der Universität und an der Technischen Hochschule hat. Der vorliegende Band enthält neben Berichten über rein mathematische Vorträge u. a. folgende die Leser dieser Zeitschrift interessierende Beiträge: G. A. Maggi, Zum Gedächtnis an G. Jung. G. A. Maggi, Ueber eine neuere Untersuchung von Somigliana über das Geoid. E. Bianchi, Bemerkungen hierzu. U. Cisotti, Ueber ein Paradoxon und ein Prinzip der Hydro-Aerodynamik. A. Pontremoli, Vorläufige Experimente über ebene Strömungen um einen Kreiszylinder, dessen Achse auf der Ebene der Strömung senkrecht steht. C. Somigliana, Bestimmung der Konstanten des Geoids durch bloße Schweremessungen. B. Finzi, Ueber die Wellenmechanik. A. Pontremoli, Neue Wege der Mechanik. A. Danusso, Rolle der Mathematik bei den gewöhnlichen Aufgaben des Konstrukteurs.

Berlin. L. Bieberbach. 899

MARTIN **GRÜNING,** ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Die Statik des ebenen Tragwerkes. Mit 434 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. VII + 706 S. Preis 45 M.

Das Buch von Grüning gehört zu den wichtigsten Erscheinungen der neueren Statikliteratur. In vorteilhafter Weise sind hier die grundlegenden Berechnungsmethoden in den Vordergrund der Darstellung gerückt; die Behandlung der Anwendungsbeispiele, als welche in praxi gebräuchliche Bauarten dienen, bietet dann keinerlei Schwierigkeit mehr. Bei den bezüglichen Entwicklungen wird ausschließlich das Prinzip der virtuellen Verrückungen herangezogen und im ersten Abschnitt des Buches ist das Prinzip ausführlich klargelegt. Hiernach werden verschiedene statisch bestimmte Tragwerke, Fachwerke und Stabwerke, eingehend analytisch untersucht und auch mit Hilfe des kinematischen Verfahrens einer Lösung zugeführt. Dann folgen Betrachtungen über Formänderungen von Tragwerken, die mit dem Prinzip, der Methode der elastischen Gewichte und mit Biegelinien bestimmt werden. Dies bildet den Uebergang zur Berechnung der statisch unbestimmten Systeme. Ein Abschnitt

zeigt die allgemeinen Verfahren und die Vereinfachung und rechnerische Auflösung der Elastizitätsgleichungen. Der nächste Abschnitt bringt die Anwendungen der Theorie des statisch unbestimmten Tragwerks; es sind Fachwerkträger, durchlaufende Balken, einfachere Rahmengebilde sowie komplizierte Stockwerkrahmen berechnet. Die beiden letzten Buchteile geben im wesentlichen eigene Untersuchungen des Verfassers über hochgradig statisch unbestimmte Systeme wieder, die teilweise aus früheren Veröffentlichungen bekannt waren. Lösungen werden hier unter Verwendung der Theorie der Differenzengleichungen erzielt. Es sind behandelt: Balken auf vielen Stützen, gelenklose Längsträger der Fahrbahn auf Fachwerkbalken, der Balkenrost, durchlaufende Balken auf Pfosten mit eingespannten Füßen und gegliederte Druckstäbe. Allen die sich mit Statik beschäftigen wird das Buch ein wertvoller Wegweiser sein.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 690

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

KARL F. **HERZFELD,** München, unter Mitwirkung von H. G. Grimm, Würzburg, Kinetische Theorie der Wärme. Mit 52 Figuren. Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik. 11. Aufl., dritter Band, zweite Hälfte. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1925. X + 436 S. Preis geh. 21 M., geb. 24 M.

RENÉ **FORTRAT,** Professeur sans chaire à la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble. Introduction a L'Etude de la Physique Théorique. I. Fascicule: Mécanique. IV + 130 S. II. Fascicule: Les Vibrations. 164 S. VI. Fascicule: Mécanique statistique. 100 S. VII. Fascicule: Les Principes d'Action et de Relativité. 70 S. Preis je 10 Frs. Libraire Scientifique J. Hermann, Paris 1927.

Dr. A. **FLECHSENHAAR,** Oberstudienrat in Frankfurt a. M. Einführung in die Finanzmathematik. Zweite Auflage. Bearbeitet in Verbindung mit Dr. F. Fleege-Althoff, Dipl.-Hl. in Mannheim B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. VI + 109 S. Geh. 3,20 M.

C. G. J. **JACOBI,** Theorie der elliptischen Funktionen, aus den Eigenschaften der Theta-Reihen abgeleitet. Herausgegeben von Adolf Kneser. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 224. Akadem. Verlagsges m. b. H., Leipzig 1927. 64 S. Preis 3,20 M.

Dr. KONRAD **KNOPP,** ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II. Teil. Aufgaben zur höheren Analysis. Sammlung Göschen 878. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1928. 143 S. Preis 1,50 M.

FRIEDRICH **KUNTZE,** Professor an der Universität Berlin. Von den neuen Denkmitteln der Philosophie. In sechs Briefen an den Einzelnen und an die Philosophischen Arbeitsgemeinschaften. 1. u. 2. Carl Winters Universitätsbuchhandlung, Heidelberg 1927. 117 S. Preis 2 M. und 1,50 M.

Dr. NORBERT **LEINEWEBER,** Dr. WILHELM **FARWICK,** Wertetafel. Ausgabe A, Dezimale Einteilung der Winkelgrade. Ausgabe B, Einteilung der Winkelgrade in Minuten und Sekunden. Zweite Auflage. Aschendorffsche Verlagsbuchhandl., Münster i. W. 1927. VIII + 112 S. Preis geb. je 2,80 M. Dies. Zahlentafel Ausgabe A. Verkürzte Ausgabe der »Wertetafel« IV + 66 S. Preis kart. 1,40 M, geb. 2,25 M.

# NACHRICHTEN

**Emil Waelsch †.** Nach kurzer Krankheit, die sich im Gefolge einer scheinbar geglückten Operation herausstellte, starb am 5. Juni 1927 unerwartet Emil Waelsch, Professor an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

Waelsch wurde in Prag am 9. April 1863 geboren. Er besuchte daselbst Volksschule und Mittelschule, sowie vom Herbst 1880 angefangen durch vier Jahre als ordentlicher Hörer die deutsche Technische Hochschule. Bereits während seiner Studienzeit beschäftigte er sich mit selbständigen mathematischen Arbeiten, zu denen ihm der Besuch der Vorlesungen an der deutschen Universität in Prag die Anregung bot. Aus jener Zeit stammen die ersten Arbeiten über geometrische Aufgaben. An die Prager Zeit schloß sich ein mehrjähriges Studium an deutschen Universitäten an. Im Studienjahre 1884/85 hörte Waelsch in Leipzig bei Felix Klein, 1885/86 in Erlangen bei Gordan und Max Noether und später 1892/93 bei Sophus Lie in Leipzig. In der Zeit zwischen den Studien in Erlangen und dem zweiten Aufenthalt in Leipzig war Waelsch, nachdem er durch die Ablegung der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik und durch seine Promotion zum Doktor der Philosophie an der Universität in Erlangen den äußerlichen Schlußpunkt unter seine Studien gesetzt hatte, als Assistent bei der Lehrkanzel für darstellende Geometrie an der deutschen Technischen Hochschule in Prag tätig. Im Jahre 1890 habilitierte er sich an dieser Hochschule für Geometrie. Als Privatdozent hielt er Vorlesungen über darstellende Geometrie, Elementargeometrie der Kegelschnitte, Theorie der algebraischen Kurven und Differentialgeometrie. In seine Assistenten- und Privatdozentenzeit fiel der zweite Aufenthalt in Leipzig und eine einjährige Tätigkeit bei Wilhelm Fiedler am Polytechnikum in Zürich, an dem er auch Vorlesungen halten konnte.

Nachdem Waelsch schon vorher einige Male für eine Ernennung zum Professor an den

Hochschulen in Brünn und Prag vorgeschlagen und insbesondere zur Besetzung durch ihn die Errichtung einer Lehrkanzel für Geometrie an der deutschen Universität in Prag beantragt gewesen war, wurde er im Jahre 1895 zum außerordentlichen, und im Jahre 1898 zum ordentlichen Professor der Mathematik an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn ernannt. Neben seinen Pflichtvorlesungen über Mathematik hielt er wiederholt Vorlesungen über spezielle Gebiete, insbesondere über Algebraische Analysis, Nullsysteme, Kinematik, Variationsrechnung, Fouriersche Reihen und Vektoranalysis. Im Jahre 1910 wurde ihm nach dem Tode Rupps der Lehrauftrag zur Abhaltung der Vorlesungen über darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen erteilt. Neben der Ausübung dieses Lehrauftrages hielt Waelsch in der ersten Zeit auch weiter die Vorlesungen über Mathematik; auch späterhin trat an ihn infolge der Abberufung von Professoren der Mathematik wiederholt die Aufgabe heran, die entstandenen Lücken auszufüllen.

Für Waelsch bedeutete die Ausübung der Lehrtätigkeit mehr als die Erfüllung einer übernommenen Pflicht. Er ging in seinem Lehramte tatsächlich voll auf. Buchstäblich die ganzen Tage brachte er in seinem Arbeitsraum auf der Hochschule zu, um stets den Studierenden zur Verfügung zu stehen. Seine Lehrtätigkeit, die manchmal ein ungewöhnliches Pensum von Stunden ausfüllte, verdroß ihn nie und so hat er als akademischer Lehrer an der Brünner Hochschule eine empfindliche Lücke hinterlassen. Dazu kam, daß besonders in den Jahren nach dem politischen Umsturz das Lehramt an einer deutschen Hochschule in Brünn mitunter recht unerfreulich war. Um so unverdrossener hat Waelsch weiter gearbeitet, um für sein Teil die Bedeutung dieser deutschen Hochschule als wissenschaftlicher Lehrstätte zu erhalten.

Auch organisatorisch hat Waelsch als Mitglied des Professorenkollegiums in hervorragender Weise gewirkt. Sein Verdienst ist die Errichtung des Versicherungstechnischen Kurses an der deutschen Technischen Hochschule im Jahre 1906, des ersten auf dem Gebiete der heutigen Tschechoslovakischen Republik. Wiederholt fungierte er als Dekan; eine Wahl zum Rektor, die im Jahre 1905 auf ihn fiel, hat er nicht angenommen.

Die wissenschaftliche Tätigkeit Waelschs war eine außerordentlich fruchtbare. Abgesehen von den ersten rein mathematischen Veröffentlichungen hat er während der ganzen Zeit seiner selbständigen wissenschaftlichen Arbeit in den Bahnen fortgewirkt, die ihm aus der Zeit seiner Studien in Erlangen bei Gordan und Noether vorgezeichnet waren. Eine Fülle von Arbeiten über die Invariantentheorie kennzeichnet eine systematische Vertiefung in die Binäranalyse und die Anwendung dieses Kalküls auf die verschiedensten geometrischen, algebraischen, funktionentheoretischen und physikalischen Probleme.

In den letzten beiden Jahrzehnten seines Lebens widmete Waelsch den größten Teil seiner Arbeitskraft dem Ausbau der Binäranalyse, in der er einen der üblichen Vektor- und Tensorrechnung überlegenen Formalismus für die Behandlung von Aufgaben aller Gebiete der angewandten Mathematik sah. Dabei hatte er für diese Zwecke eine wohldurchdachte äußerst knappe Darstellungsweise ausgebildet, die es ihm erlaubte, Problemgruppen, die sonst recht weitläufig erscheinen, in größter Eleganz und Kürze zu erledigen. Leider wurde dadurch die allgemeine Zugänglichkeit dieser Arbeiten sehr beeinträchtigt, so daß Waelsch für seine Binäranalyse nur wenig Anhänger zu gewinnen vermochte. Zwei der hierher gehörigen Arbeiten über die Anwendung der Binäranalyse auf die Theorie der Kugelfunktion und auf die Mechanik starrer Körper sind in dieser Zeitschrift erschienen; aber obwohl der Herausgeber sich sehr darum bemüht hatte, im Interesse einer weiteren Verbreitung der gewiß sehr wertvollen Ansätze, den Verfasser zu einer ausführlicheren und leichter verständlichen Darstellungsform zu bewegen, wich dieser von seiner Eigenart, die ihm sein wissenschaftliches Gewissen vorschrieb, nur sehr wenig ab. So ist viel von dem, was in den Waelschschen Gedankengängen fruchtbar hätte werden können, bisher verloren gegangen und harrt noch des Interpreten, der es für die weitere Auswertung erschließen wird. Dieses gilt auch von den letzten, mit der Binäranalyse nicht unmittelbar zusammenhängenden Arbeiten von Waelsch zur Kinematik, die zweifellos viel schöne und elegante Wendungen enthalten.

Ein Verzeichnis der Veröffentlichungen von Waelsch folgt weiter unten. Von den drei nachgelassenen Arbeiten ist die eine in den Rendiconti di Palermo erschienen; zu dieser hat Waelsch noch die Korrektur gelesen. Seine letzte Arbeit ist in dem vorliegenden Heft der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik abgedruckt.

Die Persönlichkeit von Waelsch war gekennzeichnet vor allem durch ein übergroßes Maß von Bescheidenheit. Niemals suchte er in den Vordergrund zu treten und so manche persönliche Unannehmlichkeit ließ er über sich ergehen, ohne hierüber außer im vertrautesten Freundeskreise Klage zu führen. Dabei war Waelsch von einer Hilfsbereitschaft, die ihm besonders eine selten zu findende Liebe unter den Studenten seiner Hochschule eintrug. Der Kreis seiner persönlichen Freunde unter den akademischen Lehrern der Technischen Hochschule war nicht sehr groß, weil Waelsch sich selten eröffnete. Mit um so größerer Anhänglichkeit hat er das Schicksal aller jener Leute verfolgt, mit denen ihn persönliche Bande verbanden. Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhange auch Waelschs Tätigkeit auf kulturellem Gebiete, auf dem er für Brünn, das seine zweite ihm lieb gewordene Heimat war, Hervorragendes geleistet und durch die er sich ein besonderes Ansehen in der deutschen Bevölkerung Brünns erworben hat. Er hielt

wiederholt Vorträge volksbildnerischen Charakters und gründete unmittelbar nach dem Umsturz die »Deutsche Gesellschaft für Wissenschaft und Kunst in Brünn«, deren Präsident er bis zu seinem Tode geblieben ist. Ein Aufruf, durch den das dauernde Andenken an ihn in einer Emil Waelsch-Stiftung festgehalten werden soll, ist in dieser Zeitschrift mitgeteilt worden. Auch von künstlerischen Interessen war er erfüllt; er hat sich wiederholt selbständig als schöngeistiger Schriftsteller betätigt.

Waelschs letzter Wunsch war, daß seine Leiche in aller Stille den Flammen übergeben werde. Dieser Wunsch wurde ihm auf das genaueste erfüllt, niemand als der treue Diener der Lehrkanzel, an der er jahrelang gewirkt hat, durfte an der Leichenfeier teilnehmen. So still er seine Freunde verlassen hat, so wird doch die dankbare Erinnerung an ihn von ihnen stets hochgehalten werden.

Arbeiten-Verzeichnis.

Geometrische Darstellung der Theorie der Polargruppen. Wiener Akademie 1883.
Ueber die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren. Wr. Ak. 1883.
Ueber ein Schließungsproblem. Wr. Ak. 1884.
Ueber eine Strahlenkongruenz beim Hyperboloid. Wr. Ak. 1887.
Beiträge zur Flächentheorie. Wr. Ak. 1887.
Ueber das Normalensystem und die Centrafläche der Flächen 2. Ordnung. 2 Mitteilungen. Wr. Ak. 1887/88.
Ueber das Normalensystem und die Centrafläche algebraischer Flächen, insbesondere der Flächen 2. Grades. Dissertation. 1888.
Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie. Wr. Ak. 1889.
Ueber eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen. Wr. Ak. 1891.
Ein Satz über die Resultante algebraischer Gleichungen und seine geometrische Anwendung. Monatshefte 1891.
Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlenkongruenzen und Flächen. Wr. Ak. 1891.
Zur Konstruktion der Polargruppen. Wr. Ak. 1891.
Ueber Formen 5. Ordnung auf der kubischen Raumkurve. Wr. Ak. 1891.
Zur Geometrie der linearen algebraischen Differentialgleichungen und binären Formen. Mathem. Ges. in Prag. 1892.
Ueber eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie. Monatshefte 1892.
Ueber die Isophoten einer Fläche bei zentraler Beleuchtung. Wr. Ak. 1892.
Sur les surfaces à élément linéaire de Liouville et les surfaces à courbure constante. Compt. rend. 1893.
Problem der 6 Punkte in Steiners Photogrammetrie. Wien, 1893.
Ueber Flächen konstanter Krümmung. Wr. Ak. 1893.
Ueber binäre Formen und die Korrelationen mehrdimensionaler Räume. Monatshefte, 1893.
Ueber Tangentenkongruenzen einer Fläche. Wr. Ak. 1893.
Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes. Compt. rend. 1894.
Ueber eine Behandlungsweise der Flächen 3. Ordnung. D. M. V. 1894.
Untersuchung zu einer Binäranalyse mehrdimensionaler Räume. Wr. Ak. 1895.
Ueber die Laméschen Polynome 2. Ordnung einer Form 5. Ordnung. Wr. Ak. 1896.
Flächen mit Liouvilleschem Bogenelement. Wr. Ak. 1897.
Ueber eine geometrische Behandlungsweise der Elemente der Determinantentheorie. Monatshefte, 1898.
Sur les lignes géodésiques de certaines surfaces. Compt. rend. 1899.
Sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques. Compt. rend. 1899.
Ueber Flächen mit sphärischen oder ebenen Krümmungslinien. Brünn, Festschrift der Technik. 1899.
Ueber Binäranalyse. (3 Mitteilungen) Wr. Ak. 1903.
Ueber die lineare Vektorfunktion als binäre doppelt-quadratische Form. Wr. Ak. 1904.
Ueber die höheren Vektorgrößen der Kristallphysik als binäre Formen. Wr. Ak. 1904.
Ueber Reihenentwicklungen mehrfach-binärer Formen. Wr. Ak. 1904.
Ueber die Resultante binärer Formen. Wr. Ak. 1905.
Binäranalyse zur Geometrie des Dreiecks. Monatshefte, 1905.
Extension de l'algèbre vectorielle à l'aide de la théorie des formes binaires avec des applications à la théorie de l'élasticité. Compt. rend. 1906.
Sur les fonctions sphériques et leurs multipèdes. Compt. rend. 1906.
Ueber mehrfache Vectoren und ihre Produkte, sowie deren Anwendungen in der Elastizitätstheorie. Wr. Ak. 1906.
Sur les invariants différentiels vectoriels et la théorie des formes binaires. Compt. rend. 1907.
Ueber die Entwicklung des Produktes zweier Kugelfunktionen nach Kugelfunktionen. Wr. Ak. 1909.
Ueber Kugelfunktionen, ihre binären Formen und Vielbeine. Monatshefte, 1909.
Ueber die Kugelfunktionen des 4-dimensionalen Raumes und doppelt-binäre Formen. D. M. V. 1910.
Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei polytropischen Kurven. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1911.
Parallelperspektive, komplexe Zahlen und Trägheit ebener Massen. D. M. V. 1911.
Fonctions bipédiques, systèmes triples orthogonaux et efforts isostatiques. Compt. rend. 1912.
Quaternionen und binäre Formen zu den Minkovskischen Grundgleichungen der Elektrodynamik. 4 Mitteilungen. Wr. Ak. 1913/16.
Tangenten an Hellegleichen. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1914.

Binäranalyse des 4-dimensionalen Vektorraumes. Wr. Ak. 1916.
Polynomialvektoranalyse und Kugelfunktionen. Zf. f. angew. Math. u. Mech. 1923.
Analysen des 3- und 4-dimensionalen Vektorraumes. D. M. V. 1923.
Zur Tensoralgebra. Math. Zeitschrift. 1924.
Rechnung mit Polsystemen und Kristalldynamik. Ann. der Physik. 1925.
Zweibein und Kreisel. Zf. f. angew. Math. u. Mech. 1925.
Zur Getriebelehre. Hauptverein der Ingenieure in der C. S. R. 1926.
Ueber Laplacesche Kugelfunktionen und Fouriersche Polynome. Rendiconti di Palermo. 1927.
Schraubflächen und Nullsysteme in kotierten Räumen. Zf. f. angew. Math. u. Mech. 1927.
Vektoranalysis der komplanen Bewegung eines ebenen starren Systems. Zf. f. angew. Math. u. Mech. 1928.

Wien und Prag. E. Fanta. 890

## Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Hauptversammlung in Hamburg.

Die diesjährige Hauptversammlung der Gesellschaft findet in Hamburg im Rahmen des 90. Deutschen Naturforschertages, innerhalb der Zeit vom 16. bis 21. September, statt. Es ist in Aussicht genommen, vorzugsweise Fragen der Hydromechanik und Aeromechanik zu behandeln. Vortragsanmeldungen aus diesen und anderen Gebieten sind möglichst umgehend spätestens bis 15. Juli, an den Geschäftsführer Prof. Dr. v. Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9, zu richten.

Ortsgruppe Berlin.

Am 18. Mai sprach Hr. Dipl.-Ing. G. Stein-Berlin über »Magnetfelder in Transformatoren«. Der Vortrag wird in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden. Am 29. Juni folgt ein Vortrag von Hrn. Regierungsbaumeister F. Eisner-Berlin »Zur Berechnung des Widerstandes eines durch eine Flüssigkeit bewegten Kreiszylinders.«

Ortsgruppe Göttingen.

Am 13. Juni wird Hr. Dr. Bergmann über »Die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Transformator mittels konformer Abbildung« sprechen.

Prager Mitglieder.

Am 20. März 1928 sprach Hr. Ing. K. Körner über »Vorausbestimmung der Wirkungsgrade von Propellerturbinen bei wechselnder Belastung«. Die in gewohnter Weise durchgeführte Berechnung ergibt für kleine Belastungen gegenüber den vielfachen Versuchen stets bedeutend zu große Werte für den Wirkungsgrad. Es wurde nun gezeigt, daß die Ursache dieses Unterschiedes in der im allgemeinen bekannten Aenderung der Meridianstromlinien, deren Verlauf etwa bestimmt werden kann, gelegen ist, jedoch nicht allein in der dadurch hervorgerufenen Pumpwirkung der Laufradschaufeln, sondern auch noch in der gleichzeitig eintretenden Vergrößerung der mittleren relativen Austrittswinkel infolge erhöhten Ueberdrucks. Wird der Verlauf dieser Winkeländerung in gewisser Weise von der durchfließenden Wassermenge abhängig gemacht, so ergeben sich zwanglos die richtigen Wirkungsgradlinien.

Am 24. April sprach Hr. C. Breitfeld über »Sinus- und Tangensrelief in der Elektrotechnik«. Der Vortragende bespricht die von Raymond S. Brown ausgehende, von Prof. Fritz Emde vervollkommnete und theoretisch erläuterte Methode der Fernleitungsberechnung mit Benützung des Sinus- und Tangensreliefs in einer neuen, dem Ingenieur leicht verständlichen und übersichtlichen Darstellungsweise.

Auf der symbolischen Darstellung von Wechselstromgrößen fußend, gibt die Methode die Möglichkeit, die Größen: »Spannung, Strom, Phasenwinkel, Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand und Kabelfaktor« durch Kreisfunktionen komplexer Argumente auszudrücken. Diese Argumente selbst sind aber lineare Funktionen der Leitungslänge.

In den Horizontalprojektionen der Höhenlinien und Wasserläufe des Sinus- und Tangensreliefs erscheinen diese Argumente als Gerade (die Strom- und Spannungsstrecken) und es ist nun ein Leichtes, dem Diagramm, den Wert der Kreisfunktionen für beliebige Leitungslängen (aliquote Teile der Strom- und Spannungsstrecken) zu entnehmen, und damit den elektrischen Zustand jedes Punktes der Fernleitung kennenzulernen.

Die Methode bedeutet nach Ansicht des Vortragenden, in bezug auf Zeitgewinn bei der Fernleitungsberechnung einen ganz ungeheueren Fortschritt, ja geradezu den Grundpfeiler einer neuen Entwicklung.

**Mathematiker-Kongreß in Bologna.** In Ergänzung zu der Nachricht im letzten Heft S. 159 ist folgendes mitzuteilen.

Durch einen führenden Mathematiker des neutralen Auslandes sind mit dem vorbereitenden Ausschuß des Kongresses in Bologna Verhandlungen eingeleitet worden, die darauf hinzielten, die erwähnten Schwierigkeiten zu beseitigen, die einer Beteiligung der deutschen Fachkollegen am Kongresse entgegenstanden. Die Verhandlungen haben zu dem gewünschten Erfolg nicht geführt.

**Jahrhundertfeier der Sächsischen Technischen Hochschule in Dresden.** Am 5. Juni d. Js. beging die Technische Hochschule Dresden unter überaus starker Beteiligung seitens der Behörden, der übrigen Hochschulen und der technischen Praxis die Feier ihres hundertjährigen Bestehens. Wie die anderen älteren Hochschulen Deutschlands hat sich auch die Dresdener aus einer kleinen gewerblichen Lehranstalt entwickelt. Bedeutende Männer auf

allen Gebieten der technischen Wissenschaften waren in Dresden tätig. Wir nennen vor allem Gustav Zeuner (1828 bis 1907) den Begründer der theoretischen Maschinenlehre, dessen grundlegende Arbeiten über Turbinentheorie, technische Thermodynamik und Kinematik noch bis in die neueste Zeit hin wirksam waren. Er leitete 17 Jahre als Direktor das Dresdener Polytechnikum bis zu dessen Umwandlung in eine Hochschule im Jahre 1890. Die bedeutendste Erscheinung im Bereich der technischen Mechanik, die Dresden aufzuweisen hatte, war wohl Otto Mohr 1835 bis 1918, der fast drei Jahrzehnte dem Dresdener Lehrkörper angehörte. Seine letzte hinterlassene Arbeit konnte noch im ersten Jahrgang unserer Zeitschrift veröffentlicht werden. Es ist besonders begrüßenswert, daß aus Anlaß der Jahrhundertfeier eine neue erweiterte Auflage der Mohrschen »Abhandlungen zur technischen Mechanik« erschienen ist, die u. a. eine bisher kaum bekannte Arbeit von Mohr über die Berechnung der ebenen Stabwerke enthält. In einer schön ausgestatteten Festschrift »Ein Jahrhundert Sächsische Technische Hochschule 1828 bis 1928«, die Rektor und Senat den Teilnehmern der Jahrhundertfeier überreichen, wird eine Uebersicht über die bisherigen Leistungen der Hochschule und über die heute bestehenden lebhaften Bestrebungen zur weiteren Ausgestaltung gegeben. Durch das energische und zielbewußte Wirken des Jubiläumsrektors Prof. Dr. A. Nägel ist die Dresdener Hochschule seit langen Jahren führend in den Fragen einer Neugestaltung und Neubegründung der Unterrichtsziele und des Unterrichtsbetriebes. Auf die auch im Rahmen der Jubelfeier berührten Fragen, die die Ausbildung der Lehramtskandidaten an der Technischen Hochschule und die Verknüpfung dieses Unterrichts mit dem gesamten technischen Lehrbetrieb betreffen, werden wir noch zurückzukommen haben.

Den Wünschen für das weitere Gedeihen der Hochschule, die von so vielen Seiten anläßlich der Jubiläumsfeier zum Ausdruck gebracht wurden, schließt sich unsere Zeitschrift um so freudiger an, als sie in einer großen Zahl von Mitgliedern des gegenwärtigen Lehrkörpers geschätzte Mitarbeiter, in anderen tätige Förderer ihrer Bestrebungen zur Vertiefung der technisch-wissenschaftlichen Arbeit erblickt.

**Persönliches.** Der em. o. Prof. der Mathematik a. d. Universität in Frankfurt a. M. Geh. Reg.-Rat Dr. Arthur Schoenflies ist am 27. Mai im 76. Lebensjahre gestorben. Seine Persönlichkeit und seine wissenschaftlichen Leistungen sind von uns anläßlich seines siebzigsten Geburtstages gewürdigt worden[1]).

Hr. Prof. Dr.-Ing. e. h. Alexander Baumann, Vertreter der Flugtechnik und des Kraftfahrwesens an der Techn. Hochschule in Stuttgart, ist am 24. März 1928 im 53. Lebensjahre gestorben.

Hr. Dr. A. Walther, bisher Privatdozent in Göttingen, ist zum o. Prof. der angewandten Mathematik (Nachfolger von Reinhold Müller) an der Techn. Hochschule Darmstadt ernannt worden.

Hr. Prof. Dr. M. Polanyi, Privatdozeent an der Techn. Hochschule Charlottenburg, Mitglied der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft für physikalische Chemie, hat einen Ruf als Nachfolger von Prof. Rothmund auf den Lehrstuhl der physikalischen Chemie der Deutschen Universität in Prag erhalten.

Hr. Studienrat Dr. Fr. A. Willers, bisher Privatdozent an der Techn. Hochschule Charlottenburg, ist zum o. Prof. der Mathematik (Nachfolger von E. Papperitz) an der Bergakademie Freiberg i. Sa. ernannt worden.

Aus Anlaß der Jahrhundertfeier der Dresdener Techn. Hochschule ist der derzeitige Rektor, Prof. Dr.-Ing. A. Nägel, von der Juristischen Fakultät der Berliner Universität zum Dr. rer. pol. h. c. promoviert worden. Die Techn. Hochschule Dresden hat u. a. Hrn. Prof. Dr. O. Mader in München und Hrn. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Reinhold Müller zum Dr.-Ing. e. h. ernannt.

Hrn. Geh. H.-R. Prof. Dr.-Ing. e. h. R. Mollier wurde vom Verein deutscher Ingenieure die Grashof-Denkmünze verliehen. 903

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 157.

# ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

**Bemerkungen zur Hydrodynamik.** Zu dem Kissinger Vortrag von Herrn v. Mises, der unter diesem Titel S. 425 des vorigen Jahrgangs dieser Zeitschrift abgedruckt ist, seien mir die folgenden kurzen Bemerkungen gestattet.

Zunächst möchte ich meiner Freude Ausdruck geben, daß nun die Theorie der laminaren Reibungsschichten oder »Grenzschichten« auch außerhalb des Göttinger Kreises, zu dem ich auch das Aachener Aerodynamische Institut hinzurechnen darf, in Angriff genommen wird[2]). Der am Schluß des Textes angekündigten genauen Lösung für den umströmten Zylinder sehe ich mit lebhaftem Interesse entgegen. Wenn ich im folgenden einiges zu beanstanden habe, so ist vielleicht in einigen Punkten die erzwungene Kürze des Textes eines Kongreßvortrages daran schuld. Da ist es denn ganz gut, wenn wir vom Verfasser hinterher weitere Erläuterungen zu den zweifelhaften Stellen erhalten! Ich gliedere meine Ausführungen nach den Nummern des Vortrags.

[2]) Es sind jetzt gerade zwanzig Jahre, daß die erste Göttinger Dissertation über diesen Gegenstand, die von Blasius, erschien!

1. Grenzübergang zu $R \longrightarrow \infty$. Hier habe ich den Eindruck, daß Herr v. Mises kaum etwas anderes macht als ich, nur daß alles in einem mehr formalen Gewande erfolgt. Ich zeige erst durch eine anschauliche Betrachtung, daß in Fällen wie dem der Umströmung eines Zylinders bei kleiner Zähigkeit in unmittelbarer Nähe des Körpers eine Schicht vorhanden ist, in der die Reibungskräfte pro Volumeneinheit von der Größenordnung der Trägheitskräfte bleiben, während sie außerhalb dieser Schicht sehr klein werden; die Dicke der Schicht geht dabei mit $R^{-1/2}$ zu Null, wenn $R$ gegen unendlich geht ($R =$ Reynoldssche Zahl). Daraus folgt, daß die Differentialquotienten der Geschwindigkeit für die Richtung senkrecht zur Schicht bei großen $R$ groß gegen die Differentialquotienten längs der Schicht werden, und das führt, wenn die Ordnung $R^{-1/2}$ und um so mehr die Ordnung $R^{-1}$ gegen die Ordnung 1 gestrichen wird, zu den Gleichungen (3)[1]. Statt einer solchen Betrachtung findet sich bei v. Mises die Transformation (2) S. 427, durch die die Zähigkeit $Z$ bzw. die Reynoldssche Zahl $R$ fortgeschafft wird. Der Schritt von Gl. (2) zu den Gleichungen (3), der den Grenzübergang $R \longrightarrow \infty$ bedeutet, erfordert aber doch mehr als ein bloßes Ansetzen der Transformation (2). Nur wenn die Annahme dazu kommt, daß die Lösung von der Art ist, daß die Differentialquotienten in der Gl. (1) sich gerade so verhalten, daß sie nach der Transformation (2) beschränkt bleiben, soweit sie in Gl. (3) auftreten, und verschwinden, soweit sie in Gl. (3) nicht mehr vorhanden sind, ergibt sich wirklich das System (3). Um ein konkretes Beispiel anzugeben: In dem Ausdruck $R^{-1}\left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right)$ wird der zweite Ausdruck in der Klammer höchstens von der Größenordnung $R$, da kein Glied einer Gleichung größer sein kann als die Summe der Beträge der übrigen. Was nun den ersten Ausdruck in der Klammer, $\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2}$, betrifft, so ist dieser nach den gemachten Annahmen auf der gegebenen Stromlinie beschränkt; ob er aber auch außerhalb dieser Linie überall beim Grenzübergang $R \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt, läßt sich nicht sagen, das muß erst die Diskussion der Lösung ergeben. Ich habe daher den Eindruck, daß die Ableitung von Herrn v. Mises in diesem Punkt nicht besser ist als meine, die von vorneherein eine bestimmte Form der Lösung voraussetzt, und hinterher zeigt, daß die Lösung in der Tat von dieser Form ist. Mir scheint, daß eine solche Schlußweise bei einer strengeren, d. h. ausführlicheren Darstellung in der Art der v. Misesschen nicht entbehrt werden kann.

2. Ableitung der Hauptgleichung. Zu diesem Gegenstand habe ich meines Wissens in meiner Diskussionsbemerkung in Kissingen gesagt, daß ich in früherer Zeit verschiedene Versuche gemacht hätte, die das Gleichungssystem (3) durch Uebergang zu anderen unabhängigen Veränderlichen für die Auffindung von Lösungen geeigneter machen sollten, und daß ich dabei auch einen Versuch mit den Veränderlichen $x$ und $\psi$ gemacht hätte, daß ich mich aber nicht mehr erinnere, was ich als abhängige Veränderliche genommen hatte, und daß ich glaubte, daß die von Herrn v. Mises angegebene Formel neu sei. Inzwischen habe ich aber aus meinen alten Papieren festgestellt, daß ich genau die v. Misessche abhängige Veränderliche genommen habe, und daß ich infolgedessen auch die Gleichung (6) von Herrn v. Mises besessen habe.

Ich habe damals diese Rechnung aber nicht weiter verfolgt, weil sie mich in meinen damaligen Arbeiten nicht weiter gebracht hat. Die rechte Seite von Gl. (6) hat, wie ich bemerken möchte, die für numerische Berechnung unangenehme Eigenschaft, daß sie überall, wo $v_x = 0$ ist, und nicht gerade die linke Seite verschwindet, die Form $0 \cdot \infty$ annimmt; die $z$-Fläche ($z = z(x, \psi)$) hat an solchen Stellen, also z. B. bei $\psi = 0$ (Wand), eine Rückkehrkante. Die Profile $z(\psi)$ für konstantes $x$ zeigen daher dort eine Spitze. Die Abb. 4 S. 430 ist dahin zu berichtigen, daß die Kurven sowohl an der $Z$-Achse wie am linken Umkehrpunkt Spitzen zeigen, die beide in der Höhe $z = F(x)$ liegen. Durch die Einführung von $\sqrt{\psi}$ als unabhängiger Veränderlicher, wie dies in der Reihe (12) geschehen ist, kann die Rückkehrkante bei $\psi = 0$ fortgeschafft werden. Die andere Rückkehrkante für die inneren Stellen $v_x = 0$ bleibt jedoch, woraus geschlossen werden muß, daß die Entwicklung (12), die sich übrigens in meinen Papieren ebenfalls findet, nur in dem Gebiet vor dem Ablösungspunkt brauchbar ist. Hier kann sie allerdings von großem Nutzen sein.

3. Einige Folgerungen. Die vorstehende Bemerkung hat bereits in diesen Abschnitt übergegriffen. Hier liegt mir nun noch daran, zu der Bemerkung von Herrn v. Mises über die Kármánsche Integralbedingung und die Pohlhausensche Rechnung Stellung zu nehmen. Die Kármánsche Rechnung kommt meines Erachtens bei v. Mises unverdient schlecht weg. Ich glaube doch, daß sie vernünftig gehandhabt, recht wertvolle Dienste leisten kann, wobei vor allem in Betracht kommt, daß sie im Vergleich zu den bis dahin vorhandenen Methoden erheblich geringere Anforderungen an die mathematische Schulung des Ausführenden stellt. Sie gründet sich, kurz gesagt, darauf, daß durch die Näherungslösung die Differentialgleichung nur in zwei Randstreifen der »Grenzschicht« erfüllt wird (nämlich an der Wand, wo die linke Seite der ersten Gl. (3) verschwindet, und soweit innen in der Flüssigkeit, daß dort das Reibungsglied $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

---

[1] Im v. Misesschen Text befindet sich hier ein Schreibfehler: nicht das letzte Glied der ersten Gl. (1), sondern das vorletzte fällt fort; statt $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ bleibt also $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ stehen.

vernachlässigbar ist), in dem Zwischengebiet aber an Stelle der Differentialgleichung nur der aus ihr abgeleitete Impulssatz erfüllt wird. Die Funktionen, die zur Herstellung der Näherungslösung dienen, werden dabei so ausgewählt, daß nach Befriedigung der gewöhnlichen Randbedingungen und der auf die erwähnte Weise aus der Differentialgleichung hinzugekommenen »Randstreifen-Bedingungen« nur noch ein willkürlicher Parameter verbleibt, für den dann die Integralbedingung eine Differentialgleichung erster Ordnung liefert. Für die zweckmäßige Auswahl der Funktionen dient ein Vergleich mit bereits exakt durchgeführten Beispielen. Das Verfahren ist ohne Zweifel etwas roh, aber es ist sinnvoll genug angelegt, um die groben Züge der Vorgänge richtig herauszubringen, und es lassen sich zahlreiche Beispiele damit behandeln, die einstweilen mit den strengen Methoden gar nicht oder nur mit großem Zeitverlust behandelt werden könnten. Da eine rohe Näherungslösung immer wesentlich besser ist, als gar keine Lösung, halte ich an meiner Meinung, daß der Kármánschen Näherung ein entschiedenes Verdienst zukommt, fest.

Was nun die nach dieser Methode durchgeführte Pohlhausensche Rechnung für die ebene Platte betrifft, so zeigt der Text der Pohlhausenschen Arbeit, wenn es auch nicht ausdrücklich gesagt wird, ganz deutlich, daß diese Rechnung dazu unternommen wird, um die Brauchbarkeit verschiedener Näherungsansätze an dieser von Blasius schon exakt gelösten Aufgabe zu studieren. Pohlhausen entscheidet sich dann für einen bestimmten Funktionstypus 4. Grades und führt damit ein Beispiel durch, das in bezug auf den Ablösungspunkt an Hand einer vorliegenden experimentellen Bestimmung nachgeprüft werden konnte. Ich meine doch, daß dies alles sehr vernünftig ist.

Von den Bemängelungen auf S. 431 kann man höchstens gelten lassen, daß Herr Pohlhausen eine mögliche Vereinfachung seiner Rechnung nicht gefunden hat. Was aber damit gemeint ist, daß Herr v. Mises im Anschluß an seine Gl. (14) sagt: »Pohlhausen ... erhält .... eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\varphi(x)$ und benutzt deren Lösung, um .... den Widerstand $W$ zu berechnen. Allein eine einfache Umformung .... läßt erkennen, daß $W$ gar nicht von $\varphi$ abhängt, so daß die ganze Rechnung leerlaufend ist«, das verstehe ich nicht. Die Lösung der erwähnten Differentialgleichung heißt doch: $\varphi(x) = \text{const}\sqrt{x}$, und in der Formel für den Widerstand ergibt sich hieraus, auch bei v. Mises, der Faktor $\sqrt{l}$; also ist die »Differentialgleichung« doch benutzt! Was die Bemerkung betrifft, daß man $\varkappa$ jeden Wert zwischen 0 und $\infty$ erteilen könne, so hatte ich ursprünglich gedacht, daß Herr v. Mises dabei daran denkt, daß in $\int_0^\infty f(1-f)\,d\eta$ durch gleichförmige Streckung der Abszisse $\eta$ eine affine Transformation vorgenommen werden kann, was den Wert des Integrals natürlich beliebig ändert. Im übrigen heißt der richtige Ausdruck für diesen Fall $f'(0)\cdot\int_0^\infty f(1-f)\,d\eta$ und dieser ist gegen solche affine Tranformationen invariant. Herr v. Mises hat mich jedoch brieflich dahin aufgeklärt, daß er die Funktion $f(\eta)$ auf $f'(0) = 1$ normiert habe, und daß er mit seiner Bemerkung meint, daß man durch eine ungleichförmige Streckung der Abszissen eine andere als affine Transformation vornehmen kann, wobei die Anfangstangente $f'(0) = 1$ erhalten bleibt, während das Integral jeden endlichen Wert annehmen kann[1]). Darauf ist zu erwidern, daß doch gerade die bekannten exakten Lösungen, die in ihrem asymptotischen Verhalten der Wahrscheinlichkeitsfunktion ähnlich sind, sich also der Asymptote rasch nähern, die Richtschnur für die zu wählenden Funktionen liefern müssen, und daß deshalb gut daran getan wird, die algebraische Näherungskurve $f(\eta)$ schon bei einem verhältnismäßig kleinen endlichen $\eta$ die Linie $f(\eta) = 1$ berühren zu lassen. Natürlich kann man dann sagen, man hätte nicht die Kurven, sondern den Beiwert des Widerstands gewählt. Das erwähnte Integral ist ja im wesentlichen ein dem Widerstand entsprechender Impulsinhalt der Strömung. Ich habe gemäß dem Vorstehenden gegen eine solche Formulierung nichts einzuwenden.

Göttingen, im März 1928.

L. Prandtl. 891

* * *

**Erwiderung.** Auf die vorstehenden Bemerkungen von Herrn Prandtl möchte ich folgendes erwidern.

Zu 1: Die Prandtlsche Grenzschichttheorie besteht, von einigen naheliegenden Erweiterungen abgesehen, in der Hauptsache in folgendem Satz und den daraus zu ziehenden Konsequenzen: Die Integration der Navier-Stokeschen Differentialgleichungen für die ebene stationäre Bewegung der zähen Flüssigkeit unter den Randbedingungen, die einem in eine gleichförmige Strömung eingetauchten zylindrischen Körper entsprechen, liefert asyptotisch für große Reynoldssche Zahlen $R$ eine Lösung von diesem Typus: Die Geschwindigkeit besitzt in der unmittelbaren Umgebung des eingetauchten Zylinders ein Quergefälle von der Größenordnung $\sqrt{R}$ und folgt hier in der »Grenzschicht« der von Prandtl aufgestellten Grenzschichtgleichung, während in weiterer Entfernung alle Ableitungen der Geschwindigkeit beschränkt bleiben. — Es war ein außerordentliches Verdienst von Herrn Prandtl, vor zwanzig Jahren diesen Satz entdeckt und durch Ueberlegungen, die keine geschlossene mathematische Deduktion bilden, plausibel gemacht zu haben.

Aus der Zuschrift von Herrn Prandtl geht hervor, daß er meint, ich hätte eine »Ablei-

[1]) **Der kleinste Inhalt unter Berücksichtigung obiger Normierung (für eine Gerade zwischen 0 und 1 und Wert 1 für $\eta > 1$) ist übrigens $^1/_6$, nicht 0.**

tung« seines Satzes gegeben, und er findet, daß diese Ableitung »nicht besser« sei als seine. In Wahrheit habe ich mich an den Prandtlschen Satz gar nicht herangewagt, weil ich der Ueberzeugung bin, daß unsere heutigen mathemathischen Kenntnisse nicht im entferntesten ausreichen, ihn zu beweisen oder die Bedingungen, unter denen er gilt, abzugrenzen, und weil nach einer neuen Plausibelmachung[1] offenbar kein Bedürfnis besteht. Ich habe mich vielmehr ausschließlich mit einer Frage beschäftigt, die meines Wissens bisher noch nicht behandelt wurde, nämlich: Läßt sich beweisen, daß in der Umgebung einer willkürlich herausgegriffenen Stromlinie eine Lösung vom Typus der Grenzschichte (man sagt hier besser »Gleitschichte«, da es sich nicht notwendig um einen Rand handelt) bestehen muß, sobald man über das asymptotische Verhalten der Lösung längs der Stromlinie etwas bestimmtes voraussetzt? Natürlich etwas, das, im Fall die Stromlinie eine Begrenzung bildet, mehr ist, als eine Randbedingung im gewöhnlichen Sinn (im wesentlichen Kenntnis des Geschwindigkeits- und Druckverlaufs). Auf diese Weise gelange ich zur Aufstellung einer hinreichenden Bedingung für das Bestehen einer Gleitschichte, wobei allerdings über das, was außerhalb der infinitesimalen Umgebung der betrachteten Stromlinie geschieht, nichts ausgesagt wird. Die Antwort, die ich in meinem Vortrage gegeben habe, fasse ich hier nochmals kurz zusammen:

»Wenn in einer Folge äußerlich ähnlicher Bewegungen mit wachsendem $R$ eine Stromlinie $S$, die von einem bestimmten Punkt des Eintrittsquerschnitts ausgeht, sich asymptotisch einer bestimmten stetigen Kurve mit endlicher Krümmung nähert und gleichzeitig die Geschwindigkeit $v$ und der Druck $p$ längs $S$ gegen bestimmte stetige Funktionen der Bogenlänge $v(s)$ und $p(s)$ konvergieren; dann folgt aus den N.-St.-Gleichungen, daß in der Umgebung von $S$ eine Gleitschichte eintritt, falls die Summe $\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2}$ längs $S$ nicht konstant ist. Ist die Summe konstant, so kann eine mit wachsendem $s$ sich verlierende Gleitschichte entstehen, falls die Eintrittsbedingungen eine besondere Eigenschaft aufweisen.«

Man mag diesen Satz, von dem ich einige Anwendungen in meinem Vortrage angedeutet habe, andere später mitteilen werde, für uninteressant oder unwichtig halten. Aber die Behauptung von Herrn Prandtl, »daß ich kaum etwas anderes mache als er, nur daß alles in einem mehr formalen Gewand erscheint«, wird man schwerlich aufrecht erhalten können.

Zu 2: Die Richtigstellung meiner Skizze in Abb. 4 S. 430 nehme ich mit Dank zur Kenntnis. Folgerungen sind aus der Skizze bei mir nicht gezogen.

Zu 3: Hinsichtlich der Kármánschen »Integralbedingung« und ihrer Anwendung durch Herrn Pohlhausen muß ich ohne jede Einschränkung meine Behauptung aufrecht erhalten, daß diese Methode in keiner Weise dazu dienen kann, den Widerstandskoeffizienten $\varkappa$ einer in eine Strömung eingetauchten Platte auch nur annähernd zu berechnen. Die Behauptung stützt sich darauf, daß ich zwischen $\varkappa$ und der Geschwindigkeitsverteilung $f(\eta)$ die Beziehung

$$\varkappa = \int_0^\infty f(1-f)\, d\eta$$

aufgefunden habe, die ohne weiteres erkennen läßt, daß $\varkappa$ völlig unbestimmt bleibt, wenn man — wie es die Methode will — $f$ nicht aus der Blasiusschen Differentialgleichung sondern nur aus den Randbedingungen $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f(\infty)=1$ bestimmt.

Herr Prandtl bemerkt dazu zweierlei: 1. Herr Pohlhausen habe gar nicht die Absicht gehabt, $\varkappa$ zu berechnen, sondern seine Untersuchung nur angestellt, um aus bereits bekanntem $\varkappa$ auf ein passendes $f$ zu schließen; 2. Wir könnten in dem Maße, in dem der Gesamtverlauf von $f$ bekannt ist, $\varkappa$ näherungsweise bestimmen. — In keiner dieser beiden Bemerkungen kann ich einen Widerspruch gegen meine Behauptung finden[1].

Als »Leerlauf« habe ich eine Ueberlegung bezeichnet, die zwischen die Annahme von $f$ und die Berechnung von $\varkappa$ die Aufstellung und Integration einer Differentialgleichung für die Parameterfunktion $\varphi(x)$ einschaltet; eine Zwischenschaltung, durch die in der Tat der Eindruck erweckt wird, es sei etwas anderes, ob man die Geschwindigkeitsverteilung $f$ oder direkt $\varkappa$ annimmt.

Im übrigen bin ich, wie auch aus dem Text meines Vortrages hervorgeht, mit Hrn. Prandtl der Ansicht, daß die Kármánsche Methode in vielen Fällen, wenn man über die in Betracht kommende Funktion $f$ anderswoher, z. B. aus der Integration der Blasiusschen Differentialgleichung, einigermaßen Bescheid weiß, dazu verwendet werden kann, eine erste Näherung für die Lösung des Strömungsproblems zu liefern.

Berlin, im April 1928. R. v. Mises. 891a

[1]) Eine solche gibt z. B. auch Hr. v. Kármán, diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 233 bis 252.

[1]) Daß $\varkappa > 1/6$ folgt nur, wenn man voraussetzt, daß $f(\eta)$ konvex ist.

(Redaktionsschluß 24. Juni 1928.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.